Transformações. Mudança de variável.

Objetivos:

- transformações no plano e no espaço; mudança de variáveis;
- transformação inversa; jacobiano da inversa;
- teorema da função inversa.

Definição: Sejam $f_1, f_2, \ldots, f_n : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, n funções reais de n variáveis reais. Uma transformação é uma função vetorial de n variáveis do tipo

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\text{ponto } X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \longmapsto \text{ vetor } f(X) = (f_1(X), f_2(X), \ldots, f_n(X)) \in \mathbb{R}^n$$

As funções reais $f_1, f_2, \ldots, f_n$ são ditas de funções coordenadas.

A transformação f é diferenciável (e portanto contínua) no ponto $X_0 \in D$ se e somente se cada função coordenada $f_1, f_2, \ldots, f_n$ é diferenciável em X_0.

A transformação f é de classe C^k, $k \geq 1$, no aberto $A \subset D$ se e somente se cada função coordenada $f_1, f_2, \ldots, f_n$ é de classe C^k em A.

As transformações são chamadas também de mudanças de variável. Pois elas transformam as variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nas novas variáveis

$$\begin{cases} u_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ u_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \qquad \cdots \\ u_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

A transformação inversa de f, caso existir, é a função vetorial $g : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f \circ g = g \circ f = id$. Ela é denotada por f^{-1}, donde $f^{-1}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Observação: Nem toda transformação admite inversa. Por exemplo, $f(x, y) = (x^2, y)$. Observe que $f(2, 1) = f(-2, 1) = (4, 1)$ pelo que a inversa não estaria bem definida em $(4, 1)$.

Transformações lineares: São do tipo $f(X) = AX$. Por exemplo:

Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $f(x, y) = (x + y, x - y)$. As funções coordenadas são $f_1(x, y) = x + y$ e $f_2(x, y) = x - y$.

Podemos representar essa função por

$$f \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}}_{X} = AX$$

Transformações afins: São do tipo $f(X) = AX + B$, composição de uma transformação linear e de uma translação de vetor $\vec{B}$. Por exemplo:

Seja $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $g(x, y, z) = (x+y+z+1, -x+y+2z-3, x+2y+2)$. As funções coordenadas são $g_1(x, y, z) = x + y + z + 1$, $g_2(x, y, z) = -x + y + 2z - 3$ e $g_3(x, y, z) = x + 2y + 2$.

Podemos representar essa função por

$$g \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y+z+1 \\ -x+y+2z-3 \\ x+2y+2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}}_{B} = AX + B$$

Transformações não afins: São transformações que não podem ser expressas da forma $AX + B$, para alguma matriz quadrada A e vetor B. Por exemplo:

Seja $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $h(x, y) = (x + y, xy)$. As funções coordenadas são $h_1(x, y) = x + y$ e $h_2(x, y) = xy$.

Os exemplos mais conhecidos de mudança de variável não afim são as mudanças a coordenadas polares, cilíndricas ou esféricas:

(I) Mudança de variáveis a coordenadas polares: Um ponto $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, descrito em coordenadas cartesianas, pode ser descrito em outro sistema de coordenadas. Por exemplo, o sistema de coordenadas polares (r, θ), onde r é o comprimento do vetor $\overrightarrow{OP}$ e θ é o ângulo em radianos, tomado no sentido anti-horário, entre $\overrightarrow{OP}$ e o eixo x positivo.

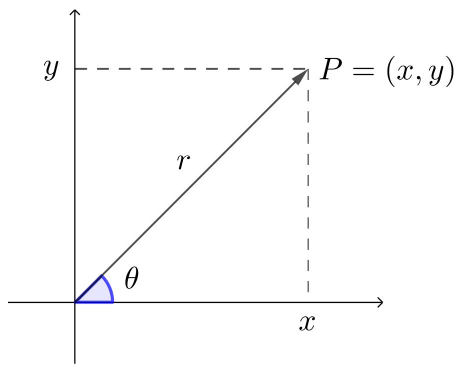


Figure 1: Coordenadas polares

Temos a função vetorial

$$\varphi_p : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad D = [0, +\infty[\times [0, 2\pi]$$

$$(r, \theta) \longmapsto (x, y) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$$

Ela também pode ser apresentada como

$$\varphi_p : \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \end{cases}, \quad \text{onde} \quad r \geq 0 \quad \text{e} \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

A mudança de coordenadas de polares a cartesianas é φ_p^{-1} é apresentada como

$$\varphi_p^{-1} : \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}, \quad x \neq 0, \quad y \in \mathbb{R}.$$

(II) Mudança de variáveis a <u>coordenadas cilíndricas</u>: A posição do ponto $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ também pode ser determinado pelas suas condenadas cilíndricas (r, θ, z). A relação entre as coordenadas cartesianas (x, y, z) e as coordenadas cilíndricas (r, θ, z) é dada pela função

$$\varphi_c : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad D = [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times \mathbb{R}$$

$$(r, \theta) \longmapsto (x, y, z) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, z)$$

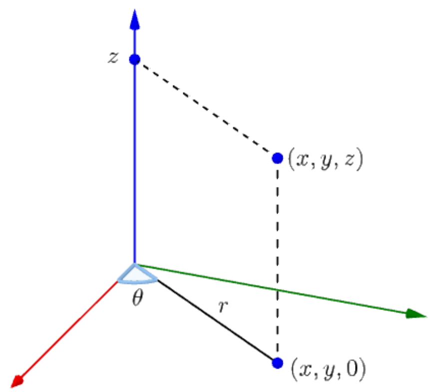


Figure 2: Coordenadas cilíndricas

Ela também pode ser apresentada como

$$\varphi_c : \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}, \quad \text{onde} \quad r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad \text{e} \quad z \in \mathbb{R}.$$

A mudança de coordenadas de cilíndricas a cartesianas é φ_c^{-1} é apresentada como

$$\varphi_c^{-1} : \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}, \quad x \neq 0, \quad y, z \in \mathbb{R}.$$

(III) Mudança de variáveis a <u>coordenadas esféricas</u>: A posição de um ponto $P = (x, y, z)$ também fica determinada pelos números ρ, ϕ, θ, onde ρ é o comprimento do vetor $\overrightarrow{OP}$, ϕ é o ângulo (em radianos) entre o eixo z positivo e o vetor $\overrightarrow{OP}$ e θ é o ângulo, tomado no sentido anti-horário, entre o eixo x positivo e o vetor projeção de $\overrightarrow{O}$ no plano xy.

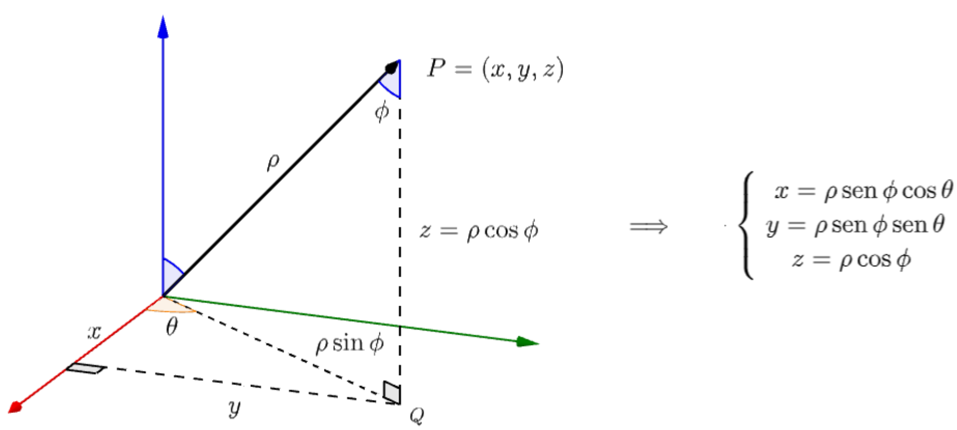


Figure 3: Coordenadas esféricas

A relação entre as coordenadas (x, y, z) e (ρ, ϕ, θ) é dada pela função

$$\varphi_c : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, D = [0, +\infty[\times[0, \pi] \times [0, 2\pi[$$

$$(\rho, \phi, \theta) \longmapsto (x, y, z) = (\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \phi)$$

Ela também pode ser apresentada como

$$\varphi_e : \begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}, \quad \text{onde} \quad r \geq 0, \quad \phi \in [0, \pi] \quad \text{e} \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

A mudança de coordenadas de esféricas a cartesianas é φ_c^{-1} é apresentada como

$$\varphi_e^{-1} : \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan(\frac{y}{x}) \\ \phi = \arccos\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \end{cases}, \quad x \neq 0, \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$$

Definição: Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação diferenciável de coordenadas $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Se existirem todas as derivadas parciais das funções coordenadas, a derivada de f no ponto $X_0 \in D$ é definida como a matriz quadrada:

$$f'(X_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(X_0) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(X_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(X_0) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(X_0) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(X_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(X_0) \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(X_0) & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2}(X_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}(X_0) \end{bmatrix}$$

Dita derivada é chamada de matriz jacobiana de f no ponto X_0. As vezes também é denotada por $Df(X_0)$ ou por $\dfrac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$.

Observação: A matriz jacobiana de uma transformação $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma matriz quadrada $n \times n$, e, assim tem determinante. Dito determinante é chamado de jacobiano de f:

$$Jf(X_0) = det f'(X_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(X_0) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(X_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(X_0) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(X_0) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(X_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(X_0) \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(X_0) & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2}(X_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}(X_0) \end{vmatrix}$$

Regra da Cadeia: Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, D aberto, e $g : E \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, E aberto, duas transformações tais que $f(D) \subset E$. Se f é diferenciável em X_0 e g é diferenciável em $f(X_0)$, então a composta $g \circ f$ é diferenciável em X_0 e

$$(g \circ f)'(X_0) = g'(f(X_0)) \cdot f'(X_0),$$

onde $g'(f(x_0))$ é a matriz jacobiana de g em $f(X_0)$ e $f'(x_0)$ é a matriz jacobiana de f em X_0.

Teorema da Função Inversa: Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, D aberto, uma transformação de classe C^1. Se $f'(X_0)$ é uma matriz inversível (i.e. $Jf(X_0) \neq 0$), então existe um aberto U contendo X_0, tal que $f : U \longrightarrow V = f(U)$ é inversível com inversa $f^{-1} : V \longrightarrow U$ de classe C^1 e

$$\left(f^{-1}\right)'(Y_0) = \left(f'(X_0)\right)^{-1},$$

onde $Y_0 = f(X_0)$.

Observação:

(I) Nas condições do teorema da regra da cadeia, o jacobiano da composta é o produto dos jacobianos:

$$J(g \circ f)(X_0) = Jg(f(X_0)) \cdot Jf(X_0)$$

(II) Nas condições do teorema da função inversa, o jacobiano da transformação inversa é o recíproco do jacobiano da transformação:

$$Jf^{-1}(Y_0) = det(f'(X_0))^{-1} = \frac{1}{Jf(X_0)},$$

onde $Y_0 = f(X_0)$.

Exemplos

1. Calcule a imagem do quadrado de vértices $(1, 1)$, $(5, 1)$, $(5, 5)$ e $(1, 5)$ pela transformação $f(x, y) = (4x, \frac{1}{2}y)$.

   Solução

   A fronteira do quadrado Q é: $\vec{\alpha}_1(t) = (t, 1)$, $\vec{\alpha}_2(t) = (5, t)$, $\vec{\alpha}_3(t) = (-t + 6, 5)$, $\vec{\alpha}_4(t) = (1, -t + 6)$, para todo $t \in [1, 5]$.

   A imagem da fronteira pela transformação são os segmentos: $f(t, 1) = (4t, \frac{1}{2})$, $f(5, t) = (20, \frac{1}{2}t)$, $f(-t + 6, 5) = (-4t + 24, \frac{5}{2})$ e $f(1, -t + 6) = (4, -\frac{1}{2}t + 3)$, respectivamente.

Consideremos, para cada $1 < c < 5$, os segmentos verticais $\vec{r}_c(t) = (c, t)$, com $1 \leq t \leq 5$, no interior do quadrado Q. A imagem desses segmentos são: $f(c, t) = (4c, \frac{1}{2}t)$. Ainda segmentos verticais no interior de $f(Q)$.

Consideremos, para cada $1 < c < 5$, os segmentos horizontais $\vec{s}_c(t) = (t, c)$, com $1 \leq t \leq 5$, no interior do quadrado Q. A imagem desses segmentos são: $f(t, c) = (4t, \frac{c}{2})$. Ainda segmentos horizontais no interior de $f(Q)$.

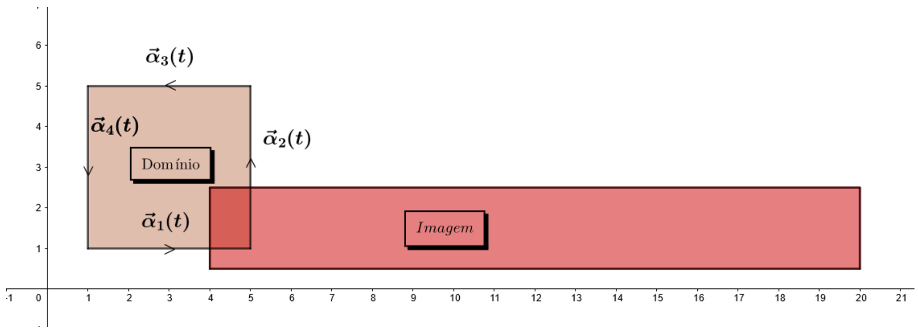


Figure 4: Imagem do quadrado Q pela transformação linear

Portanto a imagem do quadrado Q é o retângulo de vértices $(4, \frac{1}{2})$, $(20, \frac{1}{2})$, $(20, \frac{5}{2})$ e $(4, \frac{5}{2})$.

2. Calcule a imagem do retângulo de vértices $(-1, 1)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$ e $(-1, 2)$ pela transformação $f(x, y) = (y \cos x, y \operatorname{sen} x)$.

   Solução

   A fronteira do retângulo R é: $\vec{\alpha}_1(t) = (t, 1)$, $\vec{\alpha}_3(t) = (-t+1, 2)$, para todo $t \in [-1, 2]$; e $\vec{\alpha}_2(t) = (2, t)$, $\vec{\alpha}_4(t) = (-1, -t+3)$, para todo $t \in [1, 2]$.

   A imagem da fronteira pela transformação são os arcos

   $f(t, 1) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $f(-t+1, 2) = (2\cos(-t+1), \operatorname{sen}(-t+1))$, para todo $t \in [-1, 2]$;

   e os segmentos

   $f(2, t) = (t\cos(2), t\operatorname{sen}(2))$, $f(-1, -t+3) = ((-t+3)\cos(-1), (-t+3)\operatorname{sen}(-1))$, para todo $t \in [1, 2]$;

   respectivamente.

   Consideremos, para cada $-1 \leq c \leq 2$, os segmentos verticais $\vec{r}_c(t) = (c, t)$, com $1 \leq t \leq 2$. A imagem desses segmentos são: $f(c, t) = (t\cos(c), t\operatorname{sen}(c))$, segmentos de reta que passa pela origem e tem vetor diretor $(\cos c, \operatorname{sen} c)$.

   Consideremos, para cada $1 \leq c \leq 2$, os segmentos horizontais $s_c(t) = (t, c)$, com $-1 \leq t \leq 2$. A imagem desses segmentos são: $f(t, c) = (c\cos(t), c\operatorname{sen}(t))$, arco de circunferência de centro $(0, 0)$ e raio c.

Portanto a imagem do retângulo R é a seção do anel de raios 1 e 2 da figura a seguir ou o retângulo circular de vértices $(\cos(2), \operatorname{sen}(2))$, $(2\cos(2), 2\operatorname{sen}(2))$, $(2\cos(-1), 2\operatorname{sen}(-1))$ e $(\cos(-1), \operatorname{sen}(-1))$.

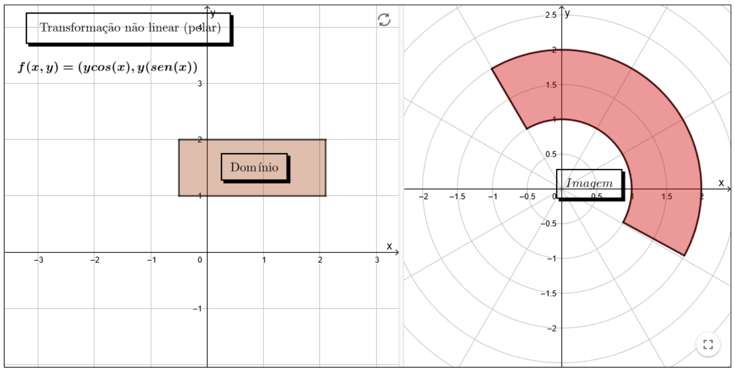


Figure 5: A imagem de um retângulo por uma transformação não linear

3. Calcule o jacobiano das seguintes transformações:

(i) $f(x,y) = (x+y, x-y)$;

(ii) $g(x,y,z) = (x+y+z+1, -x+y+2z-3, x+2y+2)$;

(iii) $h(x,y) = (x-y, xy)$.

Solução

(i) Temos $f(x,y) = (x+y, x-y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$, donde $\dfrac{\partial f_1}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = 1$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial y} = -1$. Então,

$$Jf(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

(ii) Temos $g(x,y,z) = (x+y+z+1, -x+y+2z-3, x+2y+2) = (g_1(x,y,z), g_2(x,y,z), g_3(x,y,z))$, donde $\dfrac{\partial g_1}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial g_1}{\partial y} = 1$, $\dfrac{\partial g_1}{\partial z} = 1$ $\dfrac{\partial g_2}{\partial x} = -1$, $\dfrac{\partial g_2}{\partial y} = 1$, $\dfrac{\partial g_2}{\partial z} = 2$, $\dfrac{\partial g_3}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial g_3}{\partial y} = 2$, $\dfrac{\partial g_3}{\partial z} = 0$. Então,

$$Jg(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0\cdot 1\cdot 1 + (-1)\cdot 2\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 1$$

$$-(-1)\cdot 1\cdot 0 - 2\cdot 2\cdot 1 = 0 - 2 + 2 - 1 - 0 - 4 = -5, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^3$$

(iii) Temos $h(x,y) = (x-y, xy) = (h_1(x,y), h_2(x,y))$, donde $\dfrac{\partial h_1}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial h_1}{\partial y} = 1$, $\dfrac{\partial h_2}{\partial x} = y$, $\dfrac{\partial h_2}{\partial y} = x$. Então,

$$Jh(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{vmatrix} = x - y, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

4. Considere a translação $f(x,y) = (ax + by + h, cx + dy + k)$, para algum vetor $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ e coeficientes $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Calcule o determinante jacobiano de f.

   Solução

   Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Então, $f(x,y) = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$.

   Temos $f(x,y) = (ax+by+h, cx+dy+k) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$, donde $\dfrac{\partial f_1}{\partial x} = a$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = b$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial x} = c$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial y} = d$. Então,

$$Jf(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = det(A), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

5. Determine o jacobiano da mudança de coordenadas polares a cartesianas no ponto (r, θ).

   Solução

   Temos $\varphi_p(r,\theta) = (x(r,\theta), y(r,\theta))$, onde $x(r,\theta) = r\cos\theta$, $y(r,\theta) = r \operatorname{sen}\theta$. Logo,

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\operatorname{sen}\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \operatorname{sen}\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta.$$

   Então

$$J\varphi_p(r,\theta) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} =$$

$$r\cos^2\theta + r\operatorname{sen}^2\theta = r\underbrace{(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)}_{=1} = r$$

   Observe que o jacobiano da transformação depende unicamente do raio.

6. Determine o jacobiano da mudança de coordenadas cartesianas a polares em (x,y).

   Solução

   Temos $T(x,y) = (r(x,y), \theta(x,y))$, onde $r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$. Logo,

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{-y/x^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{1/x}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Então

$$JT(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial\theta}{\partial x} & \frac{\partial\theta}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Observação: Observe que $T = \varphi_p^{-1}$ e $J\varphi_p(r,\theta) = r$. Portanto, se $r > 0$ podemos aplicar o teorema da função inversa para calcular $JT(x,y)$. Com efeito,

$$JT(x,y) = \frac{1}{J\varphi_p(r(x,y),\theta(x,y))} = \frac{1}{r(x,y)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

7. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y,z) = (x\cos y, x \operatorname{sen} y, z^2)$

   (a) Prove que f é diferenciável.

   (b) Calcule $f'\left(1, \frac{\pi}{4}, 1\right)$

   (c) Calcule o jacobiano de f

   Solução

   (a) Temos $f(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z))$ com $f_1(x,y,z) = x\cos y$, $f_2(x,y,z) = x\operatorname{sen} y$, $f_3(x,y,z) = z^2$.
   Como $\frac{\partial f_1}{\partial x} = \cos y$, $\frac{\partial f_1}{\partial y} = -x\operatorname{sen} y$, $\frac{\partial f_1}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial x} = \operatorname{sen} y$, $\frac{\partial f_2}{\partial y} = x\cos y$, $\frac{\partial f_2}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial f_3}{\partial x} = \frac{\partial f_3}{\partial y} = 0$ e $\frac{\partial f_3}{\partial z} = 2z$ são funções continuas em $\mathbb{R}^3$, então f é diferenciável em $\mathbb{R}^3$.

   (b) Temos

$$f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos y & -x\operatorname{sen} y & 0 \\ \operatorname{sen} y & x\cos y & 0 \\ 0 & 0 & 2z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'\left(1, \frac{\pi}{4}, 1\right) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   (c) Temos $J = \begin{vmatrix} \cos y & -x\operatorname{sen} y & 0 \\ \operatorname{sen} y & x\cos y & 0 \\ 0 & 0 & 2z \end{vmatrix} = 2z\left(x\cos^2 y + x\operatorname{sen}^2 y\right) = 2xz$

8. Sejam $f\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2+2uv+3v \\ u-v \end{pmatrix}, g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2-y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$.

   Calcule o jacobiano da função composta $g \circ f$ em (9).

9. Seja $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 2xy^2 \\ x+y \end{pmatrix}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que f tem uma inversa em um aberto contendo $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e calcule $[f^{-1}]'(y_0)$, $Y_0 = f(x_0)$,

Solução

Temos que $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 2xy^2 \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$ é de classe em $\mathbb{R}^2$ pois as derivadas para as de f_1 e f_2 são funções contínuas em $\mathbb{R}^2$. Tem também que

$$f'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 2y^2 & -4xy \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donde,

$$f'(x_0) = f'\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $Jf(x_0) = \det f'(x_0) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4 \neq 0$, então pelo teorema da função inversa, existe um conjunto aberto v contendo X_0, tal que $f_{|v}$ (f restrita a v) tem uma função inversa f^{-1}, de classe C^1, e além disso,

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \left[f'(x_0)\right]^{-1},$$

onde $f(x_0) = f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = y_0$ e $(f'(x_0))^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}^t = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$. Logo,

$$\left(f^{-1}\right)'\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercícios

1. Calcule a imagem do retângulo de vértices $(-1,1)$, $(2,1)$, $(2,2)$ e $(-1,2)$ pelas seguintes transformações:

   (i) Homotetia: $f(x,y) = (4x, 4y)$;

   (ii) Rotação: $g(x,y) = (-x, y)$;

   (iii) Reflexão: $h(x,y) = (x, -y)$;

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

   (i) Mostre que a função f transforma o círculo de centro na origem e raio r no círculo de centro na origem e raio r^2.

(ii) Determine e esboce a imagem por f do retângulo de vértices $(-2,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$ e $(-2,2)$.

3. Determine o jacobiano de φ_c e de sua inversa.

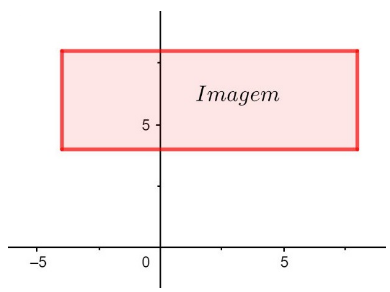
4. Determine o jacobiano de φ_e e de sua inversa.

5. Determine o determinante jacobiano de $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+2xy+3y \\ x-y \end{pmatrix}$ em $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

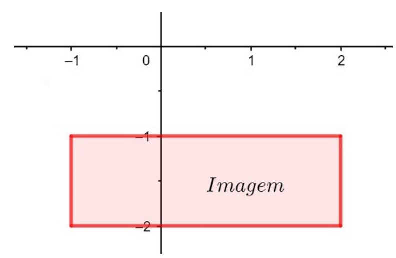
6. Prove que o jacobiano de uma transformação afim $T(X) = AX + B$ é $JT(X) = det(A)$, para todo $X \in \mathbb{R}^n$.

Respostas

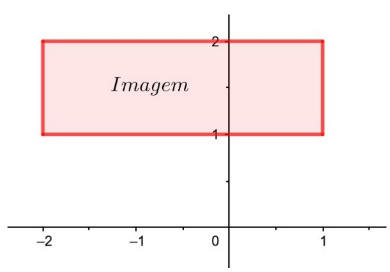
1. (i)



(iii)



(ii)



2. (i) sem resposta

(ii)

3. $J\varphi_c = r$, $J\varphi_c^{-1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

4. $J\varphi_e = \rho^2 \operatorname{sen}\phi$, $J\varphi_e^{-1} = \frac{\pm 1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x^2+y^2}}$

5. -7

6. sem resposta