Funções vetoriais de uma variável

Domínio, imagem e parametrização

Objetivos:

- Compreender a noção de função vetorial de uma variável, domínio, imagem e gráfico;
- Identificar as equações paramétricas de uma curva como a imagem de uma função vetorial;
- Relacionar equações paramétricas e cartesianas de curvas básicas.

Definição: Uma função de uma variável real a valores em $\mathbb{R}^n$ é uma função do tipo

$$\vec{r} : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\text{número } t \in I \longmapsto \text{ vetor } \vec{r}(t) \in \mathbb{R}^n$$

onde I pode ser um intervalo ou uma união de intervalos. No caso em que I for um intervalo, a função $\vec{r}$ também é dita de caminho em $\mathbb{R}^n$.

O conjunto I é o <u>domínio</u> de $\vec{r}$, $Dom(\vec{r}) = I$.

O conjunto $Im(\vec{r}) = \vec{r}(I) = \{\vec{r}(t) \in \mathbb{R}^n ; t \in I\}$ é a <u>imagem</u>, traço ou trajetória do caminho $\vec{r}$.

Se $\vec{r}$ é um caminho em $\mathbb{R}^2$, podemos escrever

$$\vec{r}'(t) = (x(t), y(t)) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath},$$

onde $x(t)$ e $y(t)$ são as funções coordenadas de $\vec{r}$.

Em geral, se I for um intervalo, a imagem $\vec{r}(I)$ é uma curva em $\mathbb{R}^2$, onde

$$\vec{r} : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in I \end{cases}$$

é uma <u>parametrização da curva</u> $C = \vec{r}(I)$.

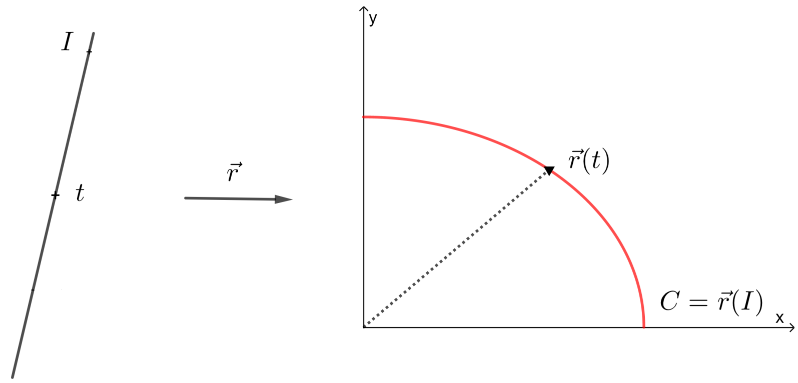


Figure 1: Parametrização de uma curva $C \subset \mathbb{R}^2$

Analogamente, se $\vec{r}$ é um caminho em $\mathbb{R}^3$, podemos escrever $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$.

Em geral, $C = \vec{r}(I)$ é uma curva espacial, parametrizada por

$$\vec{r} : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t), \quad t \in I \end{cases}$$

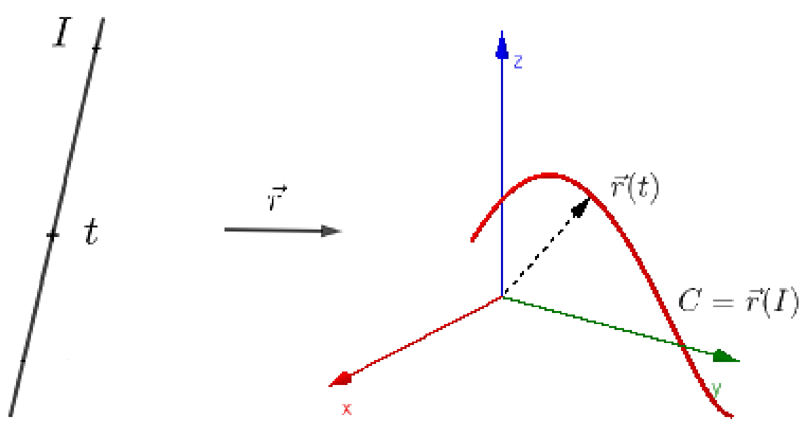


Figure 2: Parametrização de uma curva $C \subset \mathbb{R}^3$

Observação: Não devemos confundir a imagem ou traço de uma função vetorial com seu gráfico.

O gráfico de $\vec{r} : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é o conjunto $Gr(\vec{r}) = \{(t, \vec{r}(t)) \ : \ t \in I\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Assim, um caminho em $\mathbb{R}^2$ possui seu domínio em $\mathbb{R}$, seu traço ou imagem em $\mathbb{R}^2$ e seu gráfico em $\mathbb{R}^3$. Por exemplo, no caso da função vetorial $\vec{r}(t) = (\cos(t), \text{sen}(t))$, $t \in \mathbb{R}$:

$Dom(\vec{r}) = \mathbb{R}$, $Im(\vec{r})$ é a curva em $\mathbb{R}^2$

$$\vec{r} : \begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \text{sen}(t), \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

correspondente à circunferência de centro $(0,0)$ e raio $R = 1$. Já o gráfico é o conjunto $Gr(\vec{r}) = \{(t, \cos(t), \text{sen}(t)) \ : \ t \in \mathbb{R}\}$ o qual é um curva em $\mathbb{R}^3$ parametrizada por

$$\vec{\gamma} : \begin{cases} x = t \\ y = \cos(t) \\ z = \text{sen}(t), \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

correspondente a uma hélice.

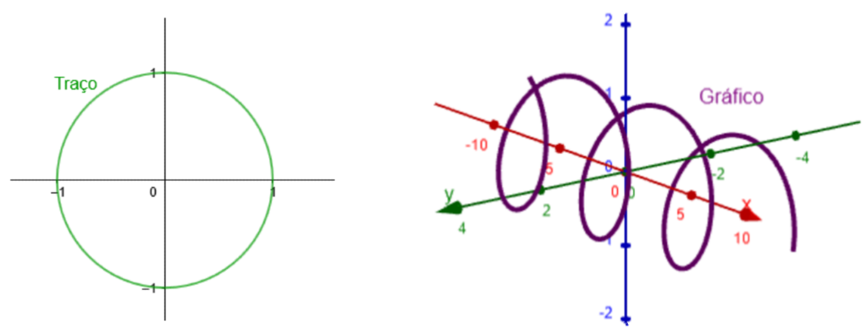


Figure 3: O traço e o gráfico de uma função vetorial de uma variável

Observação: Se t é interpretado como tempo, então $\vec{r}(t)$ representa o vetor posição de uma partícula em movimento no instante t.

Exemplos

1. Seja $\vec{r}(t) = (t, t^2)\,, t \in \mathbb{R}$, A imagem de $\vec{r}$ é a curva dada pela parametrização

$$\vec{r} : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R}$$

Eliminando o parâmetro t, temos as equações cartesianas da curva

$$C : y = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

correspondente ao gráfico da função $f(x) = x^2$.

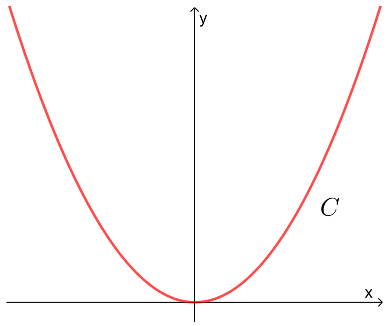


Figure 4: O gráfico de uma função escalar como imagem de uma função vetorial

2. Seja $\vec{r}(t) = (a\,\textsf{sen}\,t, a\,\textsf{cos}\,t)$, $a > 0$, $0 \le t \le 2\pi$. Como $\vec{r}(0) = \vec{r}(2\pi) = (0, a)$, então a imagem de $\vec{r}$ é uma curva fechada. Temos

$$\vec{r}: \begin{cases} x = a\,\textsf{sen}(t) \\ y = a\,\textsf{cos}(t) \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Eliminando o parâmetro t, temos que a imagem do caminho fechado é a curva $C : x^2 + y^2 = a^2$, isto é, a circunferência de centro $(0, 0)$ e raio $R = a$.

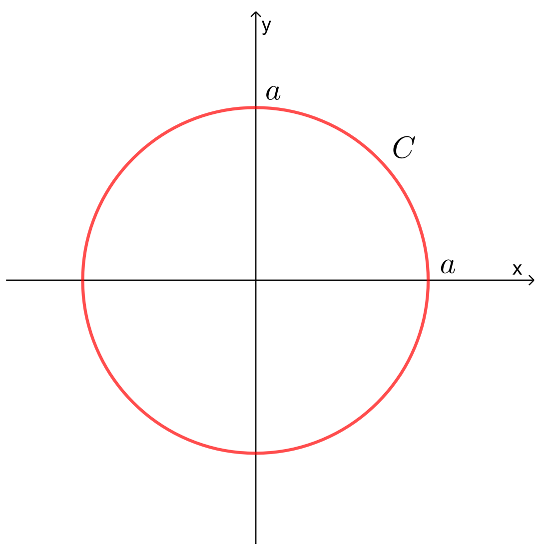


Figure 5: A circunferência como imagem de uma função vetorial

Observação: A parametrização de uma curva não é única. A diferencia entre esta parametrização e a do exemplo anterior é a orientação. Observe que neste exemplo a parametrização traça a curva em sentido contrário ao crescimento do parâmetro. Isto é, o parâmetro vai crescendo em sentido anti-horário e a parametrização traça a curva em sentido horário. Se diz que a parametrização possui orientação negativa.

3. Parametriza a curva $C : x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$, $y \ge 0$.

Solução Seja $P(x, y) \in C$

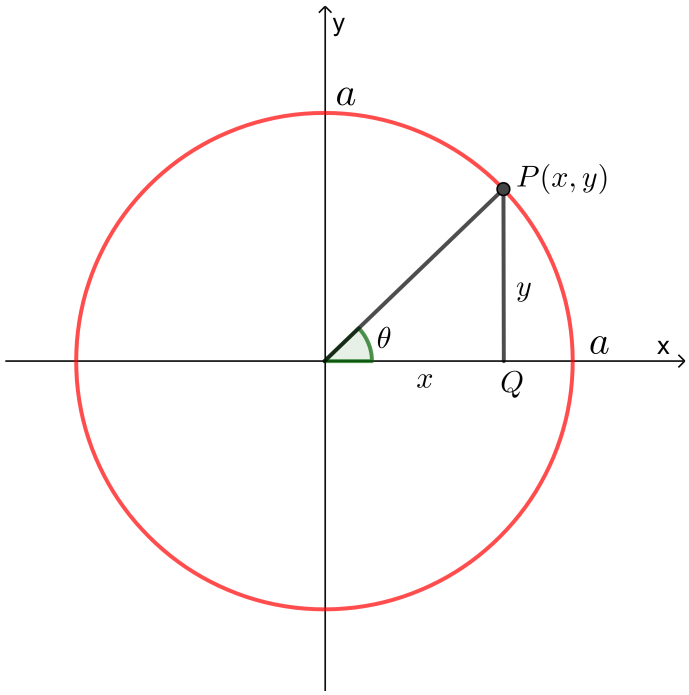


Figure 6: Parametrização da circunferência

no triângulo retângulo OPQ, temos

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\,\text{sen}\,\theta \end{cases}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Observe que o ângulo somente poder variar de 0 a π pois $y \geq 0$. Fazendo $\theta = t$, temos uma parametrização de C

$$\vec{r}(t) = (a\cos t, a\,\text{sen}\,t), \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Fazendo $\theta = 2t$ temos uma outra parametrização de C:

$$\vec{r}(t) = (a\cos(2t), a\,\text{sen}(2t)), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

Exercícios

1. Determine as equações cartesianas das curvas dadas pelas seguintes parametrizações. Esboce as curvas.

   (a) $\vec{r}_1(t) = (t, t-2)$, $t \in \mathbb{R}$.

   (b) $\vec{r}_2(t) = (4+t, 4-t)$, $t \in [0,1]$.

   (c) $\vec{r}_3(t) = (2\cos t, 2\,\text{sen}\,t)$, $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

   (d) $\vec{r}_4(t) = (2\cos t, 3\,\text{sen}\,t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

(e) $\vec{r}_5(t) = (\pm \cosh t, \operatorname{senh} t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(f) $\vec{r}_6(t) = (\sec t, \tan t)$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.

2. Esboce a imagem das seguintes funções:

   (a) $\vec{r}_1(t) = (t-4, t^2+5)$, $t \in \mathbb{R}$.

   (b) $\vec{r}_2(t) = (t, \pm\sqrt{1-t^2})$, $\forall |t| < 1$.

   (c) $\vec{r}_3(t) = (t, \pm\sqrt{t^2-1})$, $\forall |t| > 1$.

   (d) $\vec{r}_4(t) = (t^2, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

   (e) $\vec{r}_5(t) = (\cos t, \cos^2 t)$, $t \in \mathbb{R}$.

   (f) $\vec{r}_6(t) = (\cos^2 t, \operatorname{sen}^2 t)$, $t \in \mathbb{R}$.

   (g) $\vec{r}_7(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t)$, $t \in \mathbb{R}$.

   (h) $\vec{r}_8(t) = (t, t-1, t+2)$, $t \in \mathbb{R}$.

   (i) $\vec{r}_9(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

3. Determine uma parametrização das seguintes curvas:

   (a) $C_1 : y = 1 + 2x$

   (b) $C_2 : y = x^3$

   (c) Circunferência de centro $(2,3)$ e raio $R = 4$ com orientação positiva.

   (d) Elipse de centro $(1,1)$ e semi-eixos $a = 1$ e $b = 2$ com orientação negativa.

   (e) $C_3 : y^2 - x^2 = 4$

4. Determine uma parametrização da curva interseção das superfícies $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e $z = 1 + y$. Faça um esboço das superfícies e a curva.

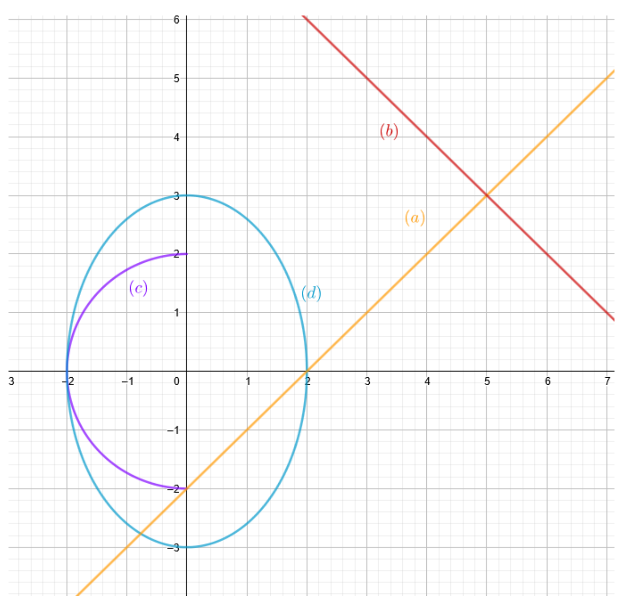
Respostas

1. (a) $y = x - 2$

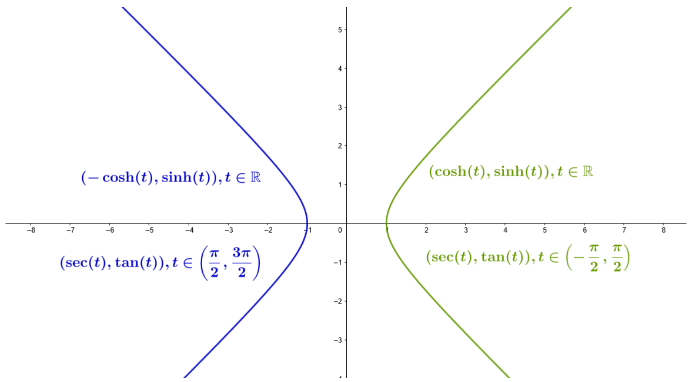
   (b) $x + y = 8$

   (c) $x^2 + y^2 = 4$, $x \leq 0$

   (d) $9x^2 + 4y^2 = 36$



(e) $x^2 - y^2 = 1$ (f) $x^2 - y^2 = 1$



2.

3. (a) $C_1 \ : \ (x, y) = (t, 1 + 2t)$, $t \in \mathbb{R}$.

   (b) $C_2 \ : \ (x, y) = (t, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$.

   (c) $C_3 \ : \ (x, y) = (2 + 2\cos t, 3 + 2\operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

   (d) $C_4 \ : \ (x, y) = (1 + \operatorname{sen} t, 1 + 4\cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

   (e) $C_5 \ : \ (x, y) = (\pm 2\operatorname{senh} t, 2\cosh t)$, $t \in \mathbb{R}$.

4. $\vec{r}(t) = (t, \frac{1}{2}(t^2 - 1), \frac{1}{2}(t^2 + 1))$, $t \in \mathbb{R}$.