Funções escalares de várias variáveis

Regra da Cadeia e Derivação Implícita

Objetivos:

- vetor gradiente;
- regra da cadeia: derivação de composição de funções;
- derivação implícita; teorema da função implícita.

Vetor Gradiente

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ que admite derivadas parciais em $(a, b) \in D$. O vetor

$$\nabla(a, b) = gradf(a, b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right)$$

é dito (vetor) gradiente de f em (a, b).

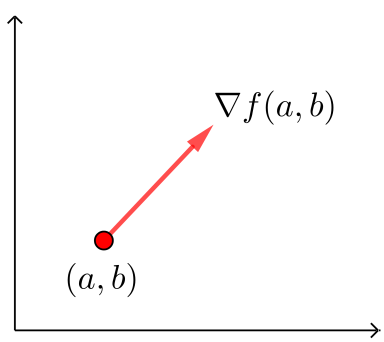

Figure 1: Vetor gradiente

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ que admite derivadas parciais em (a, b, c). Então

$$\nabla f(a, b, c) = gradf(a, b, c) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c), \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c)\right)$$

Teorema: Regra da Cadeia (derivada de função composta)

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, D aberto, $\vec{r} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, tais que $\vec{r}(t) \in D$, para todo $t \in I$. Se $\vec{r}$ for diferenciável em t_0 e f diferenciável em $\vec{r}(t_0)$, então a composta $g(t) = f(\vec{r}(t))$ é diferenciável em t_0 e

$$g'(t_0) = \nabla f(\vec{r}(t_0)) \cdot \vec{r}\,'(t_0)$$

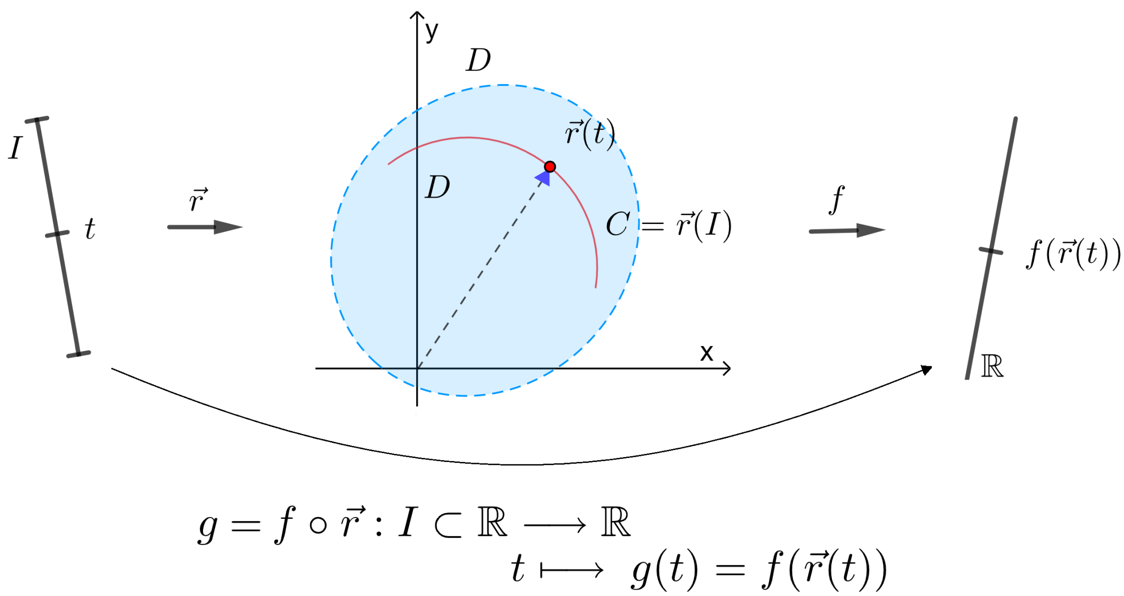

Figure 2: Composição de funções

Observações

(I) Se f for diferenciável em $D \subset \mathbb{R}^n$ e $\vec{r}$ diferenciável em $I \subset \mathbb{R}$, então $g(t) = f(\vec{r}(t))$ é diferenciável em I e $g'(t) = \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)$ para todo $t \in I$.

(II) Para $n = 2$, temos $z = f(x, y)$, $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ portanto,

$$\nabla f(\vec{r}(t)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\right), \quad \vec{r}\,'(t) = (x'(t), y'(t)) = \left(\frac{dx}{dt}(t), \frac{dy}{dt}(t)\right).$$

Então,

$$g'(t) = \frac{dg}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), g(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t)$$

ou

$$\frac{dg}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\frac{dy}{dt}(t)$$

ou, abreviadamente,

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Por abuso de notação, as vezes se escreve $g'(t)$ como $z'(t)$, $\dfrac{dz}{dt}$ ou $\dfrac{df}{dt}$.

(III) Para $n = 3$, temos $g(t) = f(\vec{r}(t)) = f(x(t), y(t), z(t))$.

Logo,

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t), z(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t), z(t))y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(x(t), y(t), z(t))z'(t)$$

ou, abreviadamente,

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Por abuso de notação, as vezes se escreve $g'(t)$ como $w'(t)$, $\dfrac{dw}{dt}$ ou $\dfrac{df}{dt}$.

Uma consequência da regra da cadeia

(I) Seja $z = f(x, y)$ diferenciável em $D \subset \mathbb{R}^2$, D aberto. Sejam $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ diferenciáveis no aberto $E \subset \mathbb{R}^2$, tais que $(x(u, v), y(u, v)) \in D$. Então, a composta

$$F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$$

é diferenciável em $E \subset \mathbb{R}^2$ e

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v))\frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v))\frac{\partial y}{\partial u}(u, v)$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v))\frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v))\frac{\partial y}{\partial v}(u, v)$$

ou, abreviadamente,

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

(II) Sejam $w = f(x, y, z)$ diferenciável em $D \subset \mathbb{R}^3$, D aberto, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ diferenciáveis no aberto $E \subset \mathbb{R}^2$, tais que $(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \subset D$. Então, a composta

$$\omega = f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

é diferenciável em $E \subset \mathbb{R}^2$ e, abreviadamente,

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$
$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$$

Derivação implícita

Definição 1: Uma função $y = g(x), x \in I$ é definida implicitamente pela equação $F(x, y) = 0$ se $F(x, g(x)) = 0$, $\forall x \in I$.

Supondo F e g são diferenciáveis, temos pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x)) \cdot g'(x) = 0$$

Supondo que $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, g(x)) \neq 0 \quad \forall x \in I$, temos

$$g'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))}, \quad \forall x \in I$$

ou, equivalentemente,

$$g'(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x)), \quad \forall x \in I.$$

Problema 1: Encontrar condições para que a equação $F(x, y) = 0$ defina implicitamente uma função diferenciável $y = g(x)$.

A solução do Problema 1 é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 1 (da função implícita): Seja $F : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 no conjunto aberto D. Seja $(x_0, y_0) \in D$, tal que

(i) $F(x_0, y_0) = 0$

(ii) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$

Então, existe uma vizinhança I de x_0 e uma função de classe C^1, $g : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $g(x_0) = y_0$ e $F(x, g(x)) = 0$, $\forall x \in I$.

Definição 2: Uma função $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D$ é definida implicitamente pela equação $F(x, y, z) = 0$ se $F(x, y, g(x, y)) = 0$, $\forall (x, y) \in D$.

Supondo F e g diferenciáveis, temos pela regra da cadeia:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,g(x,y))\dfrac{dx}{dx} + \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,g(x,y))\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y))\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,g(x,y))\dfrac{dx}{dy} + \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,g(x,y))\dfrac{dy}{dy} + \dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y))\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y))\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,g(x,y)) \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y)\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,g(x,y)) \end{cases}$$

Supondo $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y)) \neq 0$, $\forall (x,y) \in D$, temos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,g(x,y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y))}, \quad \forall (x,y) \in D \\ \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,g(x,y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y))}, \quad \forall (x,y) \in D \end{cases}$$

ou, equivalentemente,

$$\nabla g(x,y) = -\left(\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y))\right)^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)_{(x,y,g(x,y))}, \quad \forall (x,y) \in D$$

Problema 2: Em que condições a equação $F(x, y, z) = 0$ define implicitamente uma função diferenciável $z = g(x, y)$?

A solução do Problema 2 é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 2 (da função implícita): Seja $F : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 no conjunto aberto D. Seja $(x_0, y_0, z_0) \in D$, tal que

(i) $F(x_0, y_0, z_0) = 0$;

(ii) $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Então, existe uma vizinhança V de (x_0, y_0) e uma função de classe C^1, $g : V \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $g(x_0, y_0) = z_0$ e $F(x, y, g(x, y)) = 0$, $\forall (x, y) \in U$.

Observação

(I) O gráfico das função $y = g(x)$ dada pelo Teorema 1 da função implícita está incluído na curva de nível $F(x, y) = 0$.

(I) O gráfico das função $z = g(x, y)$ dada pelo Teorema 2 da função implícita está incluído na superfície de nível $F(x, y, z) = 0$.

Exemplos

1. Seja $f(x, y) = 2 \arctan \dfrac{x}{y}$. Calcule $\nabla f(1, 1)$.

   Solução

   Temos $\nabla f(x, y) = \left(\dfrac{2 \cdot \frac{1}{y}}{1 + \frac{x^2}{y^2}}, \dfrac{-2\frac{x}{y^2}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \right) = \left(\dfrac{2y}{x^2 + y^2}, \dfrac{-2x}{x^2 + y^2} \right)$.

   Assim, $\nabla f(1, 1) = (1, -1)$.

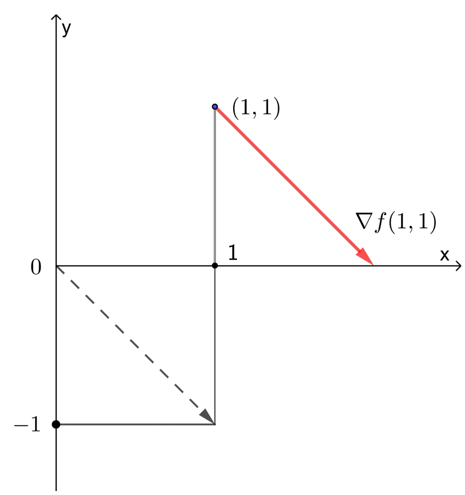

Figure 3: Vetor gradiente de $f(x, y) = 2 \arctan \dfrac{x}{y}$ no ponto $(1, 1)$

2. Seja $f(x, y, z) = \sqrt{2x^2 + 3y^2 + 4z^2}$. Calcule $\nabla f(-1, 1, 1)$.

Solução

Temos $\nabla f(x,y,z)=\left(\dfrac{4x}{2\sqrt{2x^2+3y^2+4z^2}},\dfrac{6y}{2\sqrt{2x^2+3y^2+4z^2}},\dfrac{8z}{2\sqrt{2x^2+3y^2+4z^2}}\right)$.

Assim, $\nabla f(-1,1,1)=\left(-\frac{2}{3},1,\frac{4}{3}\right)$.

3. Seja $g(t)=f(3\,\mathbf{sen}\,t,e^{t^2})$.

   (a) Expresse $g'(t)$ em termos das derivadas parciais de f.

   (b) Calcule $g'(0)$, admitindo que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1)=\frac{1}{3}$.

   Solução

   (a) Temos $g(t)=f(x,y)$ com $x=3\,\mathbf{sen}\,t$, $y=e^{t^2}$. Pela regra da cadeia, temos:
   $$g'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{dy}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)(3\,\mathbf{cos}\,t)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\left(2te^{t^2}\right)$$

   (b) Temos
   $$g'(0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x(0),y(0))(3\,\mathbf{cos}\,0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(0),y(0))\cdot 0=3\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)=3\cdot\frac{1}{3}=1.$$

4. Suponha que, para todo t, $f\left(3t,t^3\right)=\mathbf{arctan}\,t$, onde $f(x,y)$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

   (a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(3,1)$, admitindo que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(3,1)=\frac{1}{2}$.

   (b) Determine o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(3,1,f(1,3))$.

   Solução

   (a) Seja $g(t)=f(x,y)$, com $x=3t, y=t^3$. Pela regia da cadeia, temos para todo t :
   $$g'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{3}+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{3t^2}=3\frac{\partial f}{\partial x}\left(3t,t^3\right)+3t^2\frac{\partial f}{\partial y}\left(3t,t^3\right).$$

   Como $f\left(3t,t^3\right)=\mathbf{arctan}\,t$, então $g(t)=\mathbf{arctan}\,t$. Derivando em relação a t, temos para todo t, $g'(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$, ou seja,
   $$3\frac{\partial f}{\partial x}\left(3t,t^3\right)+3t^2\frac{\partial f}{\partial y}\left(3t,t^3\right)=\frac{1}{1-t^2}.$$

Para $t = 1$, temos:

$$3\frac{\partial f}{\partial x}(3,1) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(3,1) = \frac{1}{2}.$$

Como $\dfrac{\partial f}{\partial y}(3,1) = \dfrac{1}{2}$, então, $3\dfrac{\partial f}{\partial x}(3,1) + \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2}$, donde $\dfrac{\partial f}{\partial x}(3,1) = -\dfrac{1}{3}$.

(b) A equação do plano tangente é :

$$z = f(3,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(3,1)(x-3) + \frac{\partial f}{\partial y}(3,1)(y-1),$$

onde $f(3,1) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$. Então, temos

$$z = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}(x-3) + \frac{1}{2}(y-1).$$

5. A curva C parametrizada por $\vec{r}(t) = (2t, t^2, z(t))$ está contida no gráfico de $z = f(x,y)$. Sabe-se que $f(2,1) = 3$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 1$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1) = -1$. Determine a equação da reta tangente a C no ponto $\vec{r}(1)$.

Solução

A equação da reta tangente a C em $\vec{r}(1)$ é dada por:

$$(x,y,z) = \vec{r}(1) + \lambda\vec{r}\,'(1), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Como $\vec{r}(t) = (2t, t^2, z(t))$ está contida no gráfico de $z = f(x,y)$, então $z(t) = f(2t, t^2)$, e portanto, $z(1) = f(2,1) = 3$. Logo, $\vec{r}(1) = (2,1,3)$. Temos $\vec{r}\,'(t) = (2, 2t, z'(t))$, donde $\vec{r}\,'(1) = (2, 2, z'(1))$.

Como $z = f(x,y)$, com $x = 2t$, $y = t^2$, então, pela regra da cadeia, temos

$$z'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=2} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \cdot \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{=2t} = 2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2t\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

donde,

$$z'(1) = 2\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 0.$$

Portanto, $\vec{r}\,'(1) = (2,2,0)$. Assim, a equação da reta tangente é:

$$(x,y,z) = (2,1,3) + \lambda(2,2,0), \lambda \in \mathbb{R}.$$

6. A pressão P (em kilopascals), volume V (em litros) e temperatura T (em kelvins) de um mol de um gás ideal relacionam-se pela equação $PV = 8,31T$. Determine a taxa de variação da pressão quando a temperatura é $300\ K$ e está aumentando com a taxa de $0,1\ K/s$ e o volume é $100\ L$ e está aumentando com a taxa de $0,2\ L/s$.

   Solução

   Das hipóteses sabemos que quando $T = 300$, $\dfrac{dT}{dt} = 0,1$. E que quando $V = 100$, $\dfrac{dV}{dt} = 0,2$.

   Considere $P(V,T) = \dfrac{8,31\,T}{V}$. Aplicando a regra da cadeia:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial V}\frac{dV}{dt} + \frac{\partial P}{\partial T}\frac{dT}{dt}\bigg|_{\substack{T=300\\V=100}} = \frac{-8,3T}{V^2}\Big|_{\substack{T=300\\V=100}} \cdot 0,2 + \frac{8,3}{V}\Big|_{\substack{T=300\\V=100}} \cdot 0,1 =$$

$$= \frac{3\cdot(-8,31)}{100}\cdot 0,2 + \frac{8,31}{100}\cdot 0,1 = 0,05 + 0,01 = 0,06\ KPas/s$$

7. Seja $z = f\left(u^2 - v^2, 2uv\right)$, onde $f(x,y)$ é diferenciável. Expresse $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ em termos das derivadas parciais de f.

   Solução

   Temos $z = f(x,y)$, onde $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$. Pela regra da cadeia, temos

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\underbrace{\frac{\partial x}{\partial u}}_{2u} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\underbrace{\frac{\partial y}{\partial u}}_{2v} = 2u\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2v\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

$$= 2u\frac{\partial f}{\partial x}\left(u^2 - v^2, 2uv\right) + 2v\frac{\partial f}{\partial y}\left(u^2 - v^2, 2uv\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\underbrace{\frac{\partial x}{\partial v}}_{-2v} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\underbrace{\frac{\partial y}{\partial v}}_{2u} = -2v\frac{\partial f}{\partial x}\left(u^2 - v^2, 2uv\right)$$

$$+2u\frac{\partial f}{\partial y}\left(u^2 - v^2, 2uv\right).$$

8. Mostre que a equação $x^2y + 3y^3x^4 = 4$ define implicitamente uma função $y = g(x)$ no ponto $(1,1)$. Calcule $g'(1)$.

   Solução

   Seja $F(x,y) = x^2y + 3y^3x^4 - 4$ que é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$. Temos:

(i) $F(1,1) = 1 + 3 - 4 = 0$;

(ii) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(1,1) = [x^2 + 9y^2x^4]_{(1,1)} = 1 + 9 = 10 \neq 0$.

Logo, pelo teorema da função implícita, existe uma vizinhança I de 1 e uma função de classe C^1, $g : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $g(1) = 1$ e $F(x, g(x)) = 0$, $\forall x \in I$.

E aplicando a regra da cadeia:

$$g'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))}, \quad \forall x \in I$$

Logo,

$$g'(1) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(1,1)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(1,1)} = -\frac{14}{10} = -\frac{7}{5},$$

pois $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2xy + 12y^3x^3$, daí $\dfrac{\partial F}{\partial x}(1,1) = 2 + 12 = 14$.

9. Mostre que a equação $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4$ define uma função implícita diferenciável $z = g(x,y)$ no ponto $(1,1,2)$. Calcule $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,1)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1,1)$.

Solução Seja $F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 4$ que é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$. Temos

(i) $F(1,1,2) = 1 + 1 + 8 - 6 - 4 = 0$;

(ii) $\dfrac{\partial F}{\partial z}(1,1,2) = [3z^2 - 3xy]_{(1,1,2)} = 12 - 3 = 9 \neq 0$.

Logo, pelo teorema da funca implícita, existe uma vizinhança V de $(1,1)$ e uma função de classe C^1, $g : V \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $g(1,1) = 2$ e $F(x,y,g(x,y)) = 0$, $\forall (x,y) \in V$.

E aplicando a regra da cadeia:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,g(x,y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y))}, \quad \forall (x,y) \in D \\ \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,g(x,y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y))}, \quad \forall (x,y) \in D \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(1,1) = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(1,1,2)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(1,1,2)} = -\dfrac{[3x^2-3yz]_{(1,1,2)}}{9} = \dfrac{1}{3} \\ \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(1,1) = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(1,1,2)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(1,1,2)} = -\dfrac{[3y^2-3xz]_{(1,1,2)}}{9} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Exercícios

1. Suponha que para todo t, $f\left(t^2, 2t\right) = t^3 - 3t$, onde $f(x,y)$ é diferenciável. Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)$.

2. Admita que para todo $(x,y), x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$, onde $f(x,y)$ é diferenciável. Mostre que $g(t) = f\left(t, \frac{2}{t}\right)$, $t > 0$ é constante.

3. A pressão de $1\ mol$ de um gás ideal está aumentando em uma taxa de $0,05\ kPa/s$ e a temperatura está aumentando em uma taxa de $0,15\ K/s$. Use a equação $PV = 8,31\,T$ para determinar a taxa de variação do volume quando a pressão for $20\ kPa$ e a temperatura for $320\ K$.

4. Seja $F(x,y,z) = f\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{y}{z}, \dfrac{z}{x}\right)$. Mostre que $x\dfrac{\partial F}{\partial x} + y\dfrac{\partial F}{\partial y} + z\dfrac{\partial F}{\partial z} = 0$.

5. Seja $g(x,y) = xf\left(x^2+y, 2y, 2x-y\right)$, onde fé diferenciável. Expresse $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ em termos das derivadas parciais de f.

6. Suponha que $f(x,y)$ é uma função de classe C^1, tal que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,-3) = -1$. Sabe-se que um ponto se desloca sobre o gráfico de $z = f(x,y)$, ao longo de uma curva $\vec{r}(t) = (2\,\text{sen}\,t, 7\cos t - 3, z(t))$, onde t representa o tempo. Determine o vetor velocidade no instante em que suas coordenadas são $(2,-3,6)$.

7. Seja $F(r,\theta) = f(x,y)$, onde $x = r\cos\theta, y = r\,\text{sen}\,\theta$, sendo $f(x,y)$ diferenciável. Verifique que
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) + \text{sen}\,\theta\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta).$$

8. Se $u = x^m f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{z}, \frac{z}{x}\right)$, onde f é diferenciável. Mostre que $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = mu$.

9. Seja $\omega = f(x,y)$, onde f é diferenciável, se $x = r\cos\theta, \quad y = r\,\text{sen}\,\theta$, mostre que
$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial \omega}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \omega}{\partial \theta}\right)^2.$$

10. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em $P_0 = (0,0,0)$, tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) = 0$, $f(P_0) = 1$. Defina $g(u,v) = f(u-v, u^2-v, 3v-3)$ e calcule a equação do plano tangente ao gráfico de g no ponto $(1,1,1)$.

11. Suponha que a equação $\ln(x^2+y^2-1) + e^{xz} = 1$ define implicitamente uma função $z = f(x,y)$ diferenciável em $(\sqrt{2}, 0)$.
    (a) Calcule $\nabla f(\sqrt{2}, 0)$.
    (b) Calcule a equação do plano tangente à superfície $z = f(x,y)$ no ponto $(\sqrt{2}, 0, f(\sqrt{2}, 0))$.
    (c) Aproxime o valor de $f(1.3, 0.1)$. Considere $\sqrt{2} = 1,41$.

Respostas

1. sem resposta
2. sem resposta
3. $-0{,}27\ \ell/\text{s}$
4. sem resposta
5. $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = f(u,v,\omega) + x\left[2x\frac{\partial f}{\partial x}(u,v,\omega) + 2\frac{\partial f}{\partial z}(u,v,\omega)\right]$
   $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x\left[\frac{\partial f}{\partial x}(u,v,\omega) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(u,v,\omega) - \frac{\partial f}{\partial z}(u,v,\omega)\right]$,
   onde $u = x^2 + y, v = 2y, \omega = 2x - y$.
6. 7
7. sem resposta
8. sem resposta
9. sem resposta

10. $x - 7y - 16z = -28$

11. (a) $\nabla f(\sqrt{2}, 0) = (-2, 0)$

    (b) $z = -2(x - \sqrt{2})$

    (c) $f(1.3, 0.1) \approx -2(1.3 - 1.41) = -0.22$