



Funções escalares de várias variáveis

Extremos absolutos em compactos. Multiplicadores de Lagrange

Objetivos:

- Teorema de Weierstrass; cálculo de máximos/mínimos absolutos em compactos
- Multiplicadores de Lagrange

Teorema (de Weierstrass): Se $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua num conjunto compacto $K \subset D$, então f tem um valor máximo absoluto e também um valor mínimo absoluto em K .

Método para encontrar extremantes absolutos em um conjunto compacto

1. Achar os pontos críticos no interior de K , $Int(K)$, e achar os valores de f nestes pontos críticos.
2. Achar os valores máximos e mínimos de f fronteira de K , $Fr(K)$.
3. Compare os valores obtidos no item 1) e 2). O maior deles será o valor máximo absoluto e o menor deles será o valor mínimo absoluto.

O conjunto fronteira de K pode ser um ponto, uma curva ou união de pontos e curvas. Portanto, um caminho natural para calcular os máximos e mínimos na fronteira é estudar a imagem da parametrização do conjunto.

Exemplo: Encontre os extremos absolutos da função $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$ na região $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

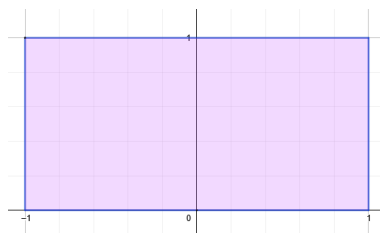


Figure 1: O conjunto $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

Observe que o conjunto fronteira de K é a união dos segmentos: $C_1 : \overline{(-1, 0)(1, 0)}$, $C_2 : \overline{(1, 0)(1, 1)}$, $C_3 : \overline{(1, 1)(-1, 1)}$ e $C_4 : \overline{(-1, 1)(-1, 0)}$.

Já o interior de K é a parte interna do retângulo, isto é, $Int(K) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 < x < 1, 0 < y < 1\}$.

Como $K \subset Dom(f) = \mathbb{R}^2$ é um conjunto compacto e $f(x, y)$ é uma função contínua em K , então o Teorema de Weierstrass nos garante a existência de máximo e mínimo em K .

1. Calculemos o pontos críticos no interior de K .

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 0 \\ 6y = 0 \end{cases}$$

Donde, $x = y = 0$. Como $(0, 0) \notin Int(K)$, não temos pontos críticos no interior do compacto.

2. Calculemos o máximos e mínimos na fronteira de K .

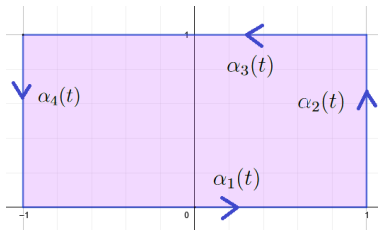


Figure 2: Fronteira do conjunto $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

Observe que a fronteira de K é a união dos segmentos $C_1 : \alpha_1(t) = (t, 0), t \in [-1, 1]$; $C_2 : \alpha_2(t) = (1, t), t \in [0, 1]$, $C_3 : \alpha_3(t) = (-t, 1), t \in [-1, 1]$ e $C_4 : \alpha_4(t) = (-1, 1 - t), t \in [0, 1]$. Estudemos cada segmento por separado:

- (a) Seja $g_1(t) = f(\alpha_1(t)) = f(t, 0) = 2t^2$, $t \in [-1, 1]$. Donde $g_1'(t) = 4t = 0 \iff t = 0$. Como 0 é um ponto interior do intervalo $[-1, 1]$, os valores máximos e mínimos absolutos de f no segmento C_1 serão atingidos no instante $t = -1$, $t = 0$ ou $t = 1$. Temos, $g_1(-1) = f(-1, 0) = 2$, $g_1(1) = f(1, 0) = 2$ e $g_1(0) = f(0, 0) = 0$.
- (b) Seja $g_2(t) = f(\alpha_2(t)) = f(1, t) = 2 + 3t^2$, $t \in [0, 1]$. Donde $g_2'(t) = 6t = 0 \iff t = 0$. Como 0 é um extremo do intervalo $[0, 1]$, temos que os valores máximos e mínimos absolutos de f no segmento C_2 serão atingidos no instante $t = 0$ ou $t = 1$. Temos, $g_2(0) = f(1, 0) = 2$ e $g_2(1) = f(1, 1) = 5$.

- (c) Seja $g_3(t) = f(\alpha_3(t)) = f(-t, 1) = 2t^2 + 3$, $t \in [-1, 1]$. Donde $g_3'(t) = 4t = 0 \iff t = 0$. Como 0 é um ponto interior do intervalo $[-1, 1]$, temos que os valores máximos e mínimos absolutos de f no segmento C_3 serão atingidos no instante $t = -1$, $t = 0$ ou $t = 1$. Temos, $g_3(-1) = f(1, 1) = 5$, $g_3(0) = f(0, 1) = 3$ e $g_3(1) = f(-1, 1) = 5$.
- (d) Seja $g_4(t) = f(\alpha_4(t)) = f(-1, 1 - t) = 2 + 3(1 - t)^2$, $t \in [0, 1]$. Donde $g_4'(t) = -6(1 - t) = 0 \iff t = 1$. Como 1 é um extremo do intervalo $[0, 1]$, temos que os valores máximos e mínimos absolutos de f no segmento C_4 serão atingidos no instante $t = 0$ ou $t = 1$. Temos, $g_4(0) = f(-1, 1) = 5$ e $g_4(1) = f(-1, 0) = 2$.

3. Resumindo:

pontos	$(-1, 0)$	$(0, 0)$	$(1, 0)$	$(1, 1)$	$(-1, 1)$	$(0, 1)$
valores	2	0	2	5	5	3

Comparando todos os valores da tabela, temos que o valor máximo absoluto em K é 5, atingido nos pontos $(1, 1)$ e $(-1, 1)$. Já o valor mínimo absoluto em K é 0, atingido no ponto $(0, 0)$.

Observe que todos os valores são atingidos na fronteira de K , pois f não possui pontos críticos no interior de K .

Na figura a seguir o compacto $K \subset \text{Dom}(f)$ está desenhado com cor roxa no plano $z = 0$, Já a imagem do retângulo e seu interior, $f(K) \subset G_f$, está desenhado com cor amarela. Observe como os pontos mais altos em $f(K)$ são $A = (1, 1, 5)$ e $B = (-1, 1, 5)$; e o ponto mais baixo de $f(K)$ é $C = (0, 0, 0)$.

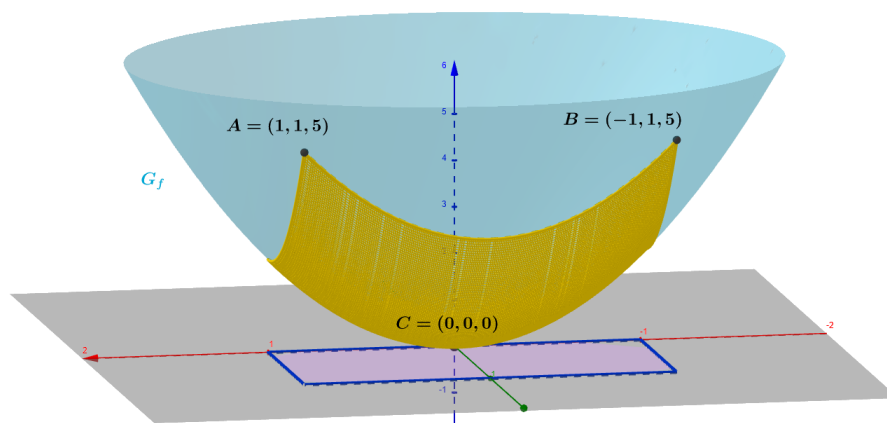


Figure 3: Extremantes absolutos em compactos

Quando a fronteira do compacto é uma curva suave, existe um outro método para calcular os extremantes do item 2 do método para encontrar extremantes absolutos em um conjunto compacto. Esse novo método é devido a Lagrange.

Máximos e mínimos condicionados com uma restrição: Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, D aberto. Queremos extremar $f(x, y)$ sujeito à condição $g(x, y) = 0$.

Dizemos que (x_0, y_0) é máximo local (respectivamente, mínimo local) de f sujeito à condição $C : g(x, y) = 0$ se existir uma bola aberta B de centro (x_0, y_0) , tal que $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ (respectivamente, $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$), $\forall (x, y) \in B \cap C$.

Teorema de Lagrange: Se f, g são de classe C^1 em D , $C : g(x, y) = 0$ é curva de nível da função g e

(a) $\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$ em C

(b) (x_0, y_0) é um extremante local de f sujeito à condição $g(x, y) = 0$

Então,

$$\nabla f(x_0, y_0) \parallel \nabla g(x_0, y_0).$$

Equivalentemente, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ (dito multiplicador de Lagrange), tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

Observação:

- (I) Se a curva $C : g(x, y) = 0$ for compacta, o Teorema de Weierstrass garante a existência de extremantes absolutos condicionados. Portanto, para encontrar os candidatos (x_0, y_0) a extremantes locais de $f(x, y)$ sujeito à condição $g(x, y) = 0$, basta com resolver o seguinte sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{array} \right.$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, sempre que $\nabla g(x, y) \neq \vec{0}$ na curva de nível. Depois devemos fazer uma análise dos dados para achar os extremantes globais.

- (II) Se a curva $C : g(x, y) = 0$ não for compacta (por exemplo $xy = 0$), o Teorema de Weierstrass não se aplica. Portanto não está garantida a existência de extremantes absolutos na curva C .
- (III) Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, D aberto, funções de classe C^1 de três variáveis. Então o conjunto $C : g(x, y, z) = 0$ é uma superfície de nível. Para encontrar os candidatos (x_0, y_0, z_0) a extremantes de $f(x, y, z)$ sujeito à condição $g(x, y, z) = 0$,

devemos resolver o sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \lambda \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \end{array} \right.$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, sempre que $\nabla g(x, y, z) \neq \vec{0}$ na superfície de nível.

Exemplo: Determine o máximo absoluto de $f(x, y) = x^2 - y^2$, sujeito à condição $3x^2 + 2y^2 = 1$.

Note que f e $g(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 1$ são de classe C^1 e $\nabla g(x, y) = (6x, 4y) \neq (0, 0)$ para todo $3x^2 + 2y^2 = 1$. O método dos multiplicadores de Lagrange nos diz que o candidato a máximo absoluto condicionado deve verificar as equações

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{array} \right.$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} (2x, -2y) = \lambda (6x, 4y) \\ 3x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x = 6\lambda x \quad (1) \\ -2y = 4\lambda y \quad (2) \\ 3x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \quad (3) \end{array} \right.$$

De (1) temos que $x = 0$ ou $\lambda = \frac{1}{3}$. Substituindo $x = 0$ em (3) obtemos $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Portanto os pontos $(0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ são candidatos a máximo.

Substituindo $\lambda = \frac{1}{3}$ em (2) obtemos $-2y = \frac{4}{3}y$, donde $y = 0$. Substituindo $y = 0$ em (3), temos que $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. Portanto os pontos $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ e $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ também são candidatos a máximo.

Vamos calcular os valores de f nesses pontos:

pontos	$(0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$	$(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$	$(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$	$(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$
valores	$-1/2$	$-1/2$	$1/3$	$1/3$

Comparando os valores da tabela, temos que o valor máximo de f na curva $C : 3x^2 + 2y^2 - 1 = 0$ é $1/3$, atingido nos pontos $(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$.

Interpretação geométrica do método dos multiplicadores de Lagrange: Os valores extremos absolutos de $f(x, y)$ restrito à condição $g(x, y) = 0$ são atingidos nos pontos onde os vetores gradientes de f e g são paralelos. Isto é, nos pontos onde a curva $g(x, y) = 0$ for tangente a uma curva de nível de f .

Com efeito, seja $C : g(x, y) = 0$ a curva de nível $k = 0$ de g verificando $C \subset D$.

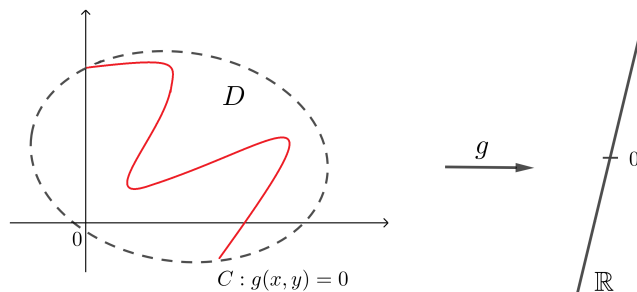


Figure 4: Curva de nível $g(x, y) = 0$

Sejam $C_{k_1}, C_{k_2}, C_{k_3}, C_{k_4}, \dots$ curvas de nível de f com $k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < \dots$.

A figura a seguir mostra um dos pontos extremos condicionados. Observe que na interseção da curva restrição com a curva de nível C_{k_1} e na interseção com a curva C_{k_3} temos mais dois extremos condicionados. Para detetar qual dos três pontos é de máximo e qual é de mínimo absoluto, precisamos conhecer apenas os valores dos níveis k_1 e k_4 , pois o nível k_3 está entre k_1 e k_4 . Portanto, se $k_1 < k_4$, o ponto (x, y) é ponto de máximo absoluto (condicionado). Já se $k_1 > k_4$, o ponto (x, y) é ponto de mínimo absoluto (condicionado).

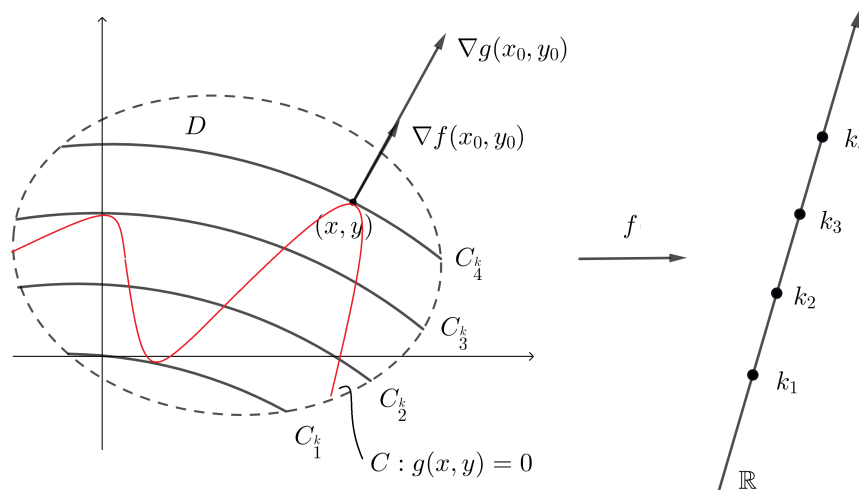


Figure 5: Interpretação geométrica do método dos Multiplicadores de Lagrange

Exemplo: Identifique no mapa de contorno de $f(x, y) = x^2 - y^2$ os extremantes condicionados a $3x^2 + 2y^2 = 1$.

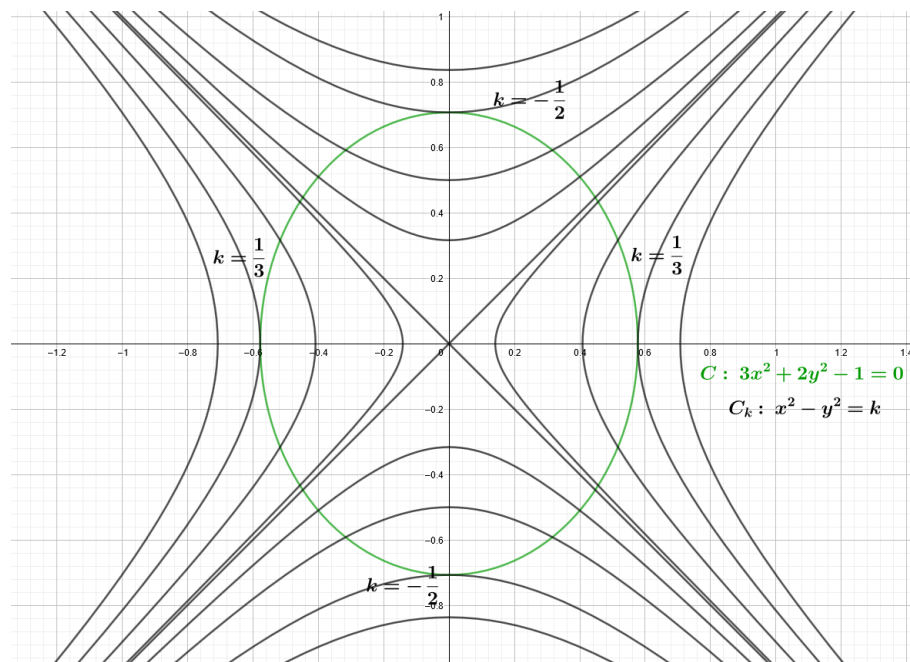


Figure 6: Extremantes de $f(x, y) = x^2 - y^2$ condicionado a $3x^2 + 2y^2 = 1$

Máximos e mínimos condicionados com duas restrições: Sejam $f, g, h : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, D aberto. Queremos extremar $f(x, y, z)$ sujeito às condições $g(x, y, z) = 0$ e $h(x, y, z) = 0$.

Sejam $S_1 : g(x, y, z) = 0$, uma superfície de nível de g , e $S_2 : h(x, y, z) = 0$, uma superfície de nível de h . E seja $C = S_1 \cap S_2$ a curva interseção das duas superfícies.

Se f, g, h são de classe C^1 em D aberto de \mathbb{R}^3 com $\nabla g(x, y, z) \neq \vec{0}$ em S_1 e $\nabla h(x, y, z) \neq \vec{0}$ em S_2 . Temos que

$$\nabla g(x_0, y_0, z_0) \perp S_1 \text{ em } (x_0, y_0, z_0) \text{ e}$$

$$\nabla h(x_0, y_0, z_0) \perp S_2 \text{ em } (x_0, y_0, z_0).$$

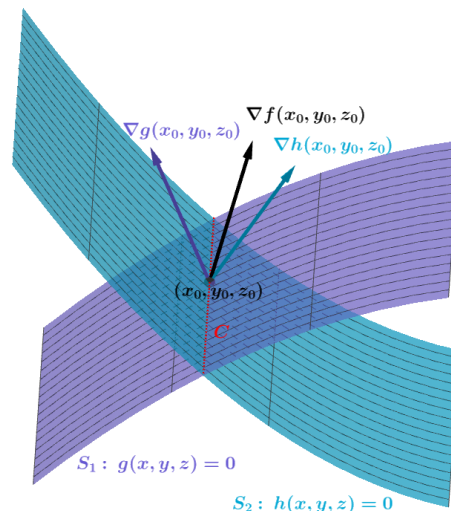


Figure 7: Multiplicadores de Lagrange com duas restrições

Se (x_0, y_0, z_0) é um extremante local de $f(x, y, z)$ sujeito a $g(x, y, z) = 0$ e $h(x, y, z) = 0$, então

- (a) $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ está no plano determinado por $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ e $\nabla h(x_0, y_0, z_0)$. Isto é, $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \mu \nabla h(x_0, y_0, z_0)$, para alguns $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- (b) $g(x_0, y_0, z_0) = 0$
- (c) $h(x_0, y_0, z_0) = 0$

Portanto, para encontrar os candidatos a extremantes locais de $f(x, y, z)$ sujeito às condições $g(x, y, z) = 0$ e $h(x, y, z) = 0$, devemos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Exemplo: Encontre os pontos de máximo e mínimo de $f(x, y, z) = x + y + z$, sujeito às restrições $x^2 + y^2 = 2$ e $x + z = 1$.

Devemos resolver o seguinte sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

onde $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2$ e $h(x, y, z) = x + z - 1$.

Temos

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x + \mu & (1) \\ 1 = 2\lambda y & (2) \\ 1 = \mu & (3) \\ x^2 + y^2 = 2 & (4) \\ x + z = 1 & (5) \end{cases}$$

De (1) e (3), temos $2\lambda x = 0$, donde $\lambda = 0$ ou $x = 0$. Se $\lambda = 0$ então de (2) temos $1 = 0$, o que é absurdo. Logo, $x = 0$. De (4) e (5) termos $y = \pm\sqrt{2}, z = 1$. Assim, $(0, \sqrt{2}, 1)$ e $(0, -\sqrt{2}, 1)$ são candidatos a extremantes. Como f é contínua e a curva $C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x + z = 1 \end{cases}$ é um conjunto compacto, então pelo teorema de Weierstrass temos máximo e mínimo absolutos. Como $f(0, \sqrt{2}, 1) = \sqrt{2} + 1 > f(0, -\sqrt{2}, 1) = -\sqrt{2} + 1$, então f tem máximo $1 + \sqrt{2}$ em $(0, \sqrt{2}, 1)$ e mínimo de $1 - \sqrt{2}$ em $(0, -\sqrt{2}, 1)$.

Exemplos

- Uma placa metálica tem a forma de um disco $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}$. Ela é aquecida de modo que a temperatura num ponto (x, y) é dada por $T(x, y) = 3x^2 + 2y^2 + \frac{y^3}{9}$. Encontre a maior e a menor temperatura na placa.

Solução

Como D é um conjunto compacto e $T(x, y)$ é uma função contínua em D , então o Teorema de Weierstrass nos garante a existência de máximo e mínimo em D .

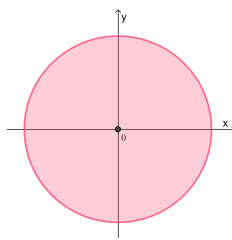


Figure 8:
 $D : x^2 + y^2 \leq 1$

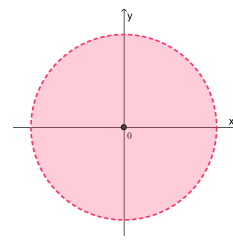


Figure 9:
 $Int(D) : x^2 + y^2 < 1$

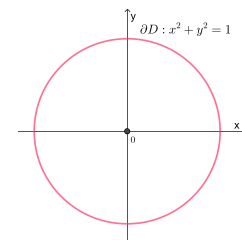


Figure 10:
 $Fr(D) : x^2 + y^2 = 1$

Em $Int(D)$, no interior de D , temos $\frac{\partial T}{\partial x}(x, y) = 6x$, $\frac{\partial T}{\partial y}(x, y) = 4y + \frac{y^2}{3}$.

Os pontos críticos em $Int(D)$ são encontrados resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x = 0 \\ 4y + \frac{y^2}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y(4 + \frac{y}{3}) = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \quad \text{ou} \quad y = -12$$

Portanto, $(0, 0), (0, -12)$ são as soluções. Como $(0, -12) \notin D$, então $(0, 0)$ é o único ponto crítico de T em $Int(D)$. Temos $T(0, 0) = 0$.

Na fronteira de D ($Fr(D)$) é a circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1. Uma parametrização da curva seria $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$.

Logo, a temperatura em $Fr(D)$ é dada por

$$T(t) = T(\cos t, \sin t) = 3 \cos^3 t + 2 \sin^2 t + \frac{\sin^3 t}{3}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Em $]0, 2\pi[$: $T'(t) = 0 \Leftrightarrow 6 \cos t(-\sin t) + 4 \sin t \cos t + \frac{3 \sin^2 t}{3} \cos t = 0 \Leftrightarrow$
 $-2 \sin \cos t + \sin^2 t \cos t = 0 \Leftrightarrow \sin t \cos t(-2 + \sin t) = 0 \Rightarrow \sin t \cos t =$
 0 ou $\underbrace{\sin t = 2}_{\text{absurdo!}} \Rightarrow \sin t \cos t = 0 \quad 0 < t < 2\pi \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\pi}{2}, \quad t = \frac{3\pi}{2}, \quad t = \pi.$

Temos

$$T\left(\frac{\pi}{2}\right) = T(0, 1) = 2 + \frac{1}{9} = \frac{19}{9}, \quad T(\pi) = T(-1, 0) = 3, \quad T\left(\frac{3\pi}{2}\right) = T(0, -1) = \frac{17}{9}$$

Na fronteira de $[0, 2\pi]$: 0 e 2π

Temos $T(0) = T(1, 0) = 3$, $T(2\pi) = T(1, 0) = 3$.

Comparando todos os valores encontrados, temos

$$0 = T(0, 0) < 3 = T(1, 0) = T(-1, 0).$$

Assim, a temperatura mínima é 0 e ocorre em $(0, 0)$ e a temperatura máxima é 3, ocorrendo em $(1, 0)$ e $(-1, 0)$.

2. Encontre o máximo e o mínimo da função $f(x, y) = x^2 + 3xy - 3x$ definida em $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.

Solução

Como a função f é contínua no compacto D , então pelo teorema de Weierstrass existem máximo e mínimo em D .

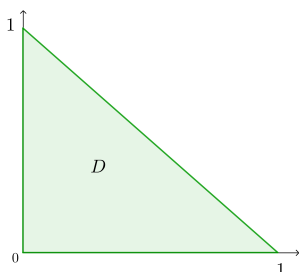


Figure 11:
 $D : x \geq 0, y \geq 0,$
 $x + y \leq 1$

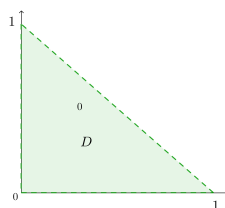


Figure 12:
 $D : x, y > 0,$
 $x + y < 1$

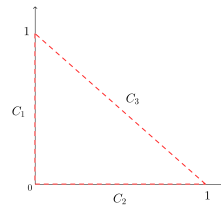


Figure 13:
 $D : 0 \leq x \leq 1 \wedge y = 0,$
 $0 \leq y \leq 1 \wedge x = 0,$
 $0 \leq x \leq 1 \wedge y = 1 - x$

No interior de D , os pontos críticos são encontrados resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x + 3y - 3 = 0 & (1) \\ 3x = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow x = 0 \Rightarrow 3y - 3 = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (0, 1).$$

Como $(0, 1) \notin \text{Int}(D)$, então não existem pontos críticos de f no interior de D . Portanto, os extremantes absolutos estão na fronteira de D .

Temos $\text{Fr}(D) = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, onde

$$C_1 : x = 0, 0 \leq y \leq 1; \quad C_2 : y = 0, 0 \leq x \leq 1; \quad C_3 : y = 1 - x, 0 \leq x \leq 1.$$

Em C_1 : $g_1(x) = f(x, y) = f(0, y) = 0, 0 \leq y \leq 1$. Função constante.

Em C_2 : $g_2(x) = f(x, y) = f(x, 0) = x^2 - 3x, 0 \leq x \leq 1$. O gráfico da função é uma parábola com valor máximo $f(0, 0) = 0$ e mínimo $f(1, 0) = -2$.

Em C_3 : $g_3(x) = f(x, y) = f(x, 1-x) = x^2 + 3x(1-x) - 3x = x^2 + 3x - 3x^2 - 3x = -2x^2, 0 \leq x \leq 1$. O gráfico da função é uma parábola com valor máximo $f(0, 1) = 0$ e mínimo $f(1, 0) = -2$.

Portanto, o valor máximo de f em $\text{Fr}(D)$ é 0 e ocorre em todos os pontos da curva C_1 . Já o valor mínimo é -2 e é atingido no ponto $(1, 0)$.

3. Determine o máximo de $f(x, y) = x + y$, sujeito à condição $x^2 + y^2 = 1$.

Solução

Seja $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Queremos maximizar $f(x, y) = x + y$ sujeito a $g(x, y) = 0$.

Tanto f quanto g são funções de classe C^1 , então para aplicar Multiplicadores de Lagrange devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} (1, 1) = \lambda(2x, 2y) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} 1 = 2\lambda x & (1) \\ 1 = 2\lambda y & (2) \\ x^2 + y^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

$$(1), (2) \xrightarrow[4 \neq 0]{x \neq 0} \lambda = \frac{1}{2x}, \lambda = \frac{1}{2y} \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y \Rightarrow 2x^2 = 1.$$

Portanto, $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, x = y$. Daí, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ são os candidatos a extremantes locais.

Como $f(x, y) = x + y$ é contínua e $C : x^2 + y^2 = 1$ é um conjunto compacto, então pelo teorema de Weierstrass f assume máximo absoluto e também mínimo absoluto em C . Aliás,

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} > f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2},$$

então o ponto de máximo é $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e o valor máximo é $\sqrt{2}$.

4. Encontre os pontos da elipse $x^2 + xy + y^2 = 3$ mais próximos e mais afastados da origem.

Solução

A distância de (x, y) à origem é dada por $d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Então, devemos minimizar $f(x, y) = d^2(x, y) = x^2 + y^2$ sujeito a $g(x, y) = 0$, onde $g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3$.

Tanto f quanto g são funções de classe C^1 , então para aplicar Multiplicadores de Lagrange devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2x = \lambda(2x + y) & (1) \\ 2y = \lambda(x + 2y) & (2) \\ x^2 + xy + y^2 = 3 & (3) \end{cases}$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} (2 - 2\lambda)x - \lambda y = 0 \\ -\lambda x + (2 - 2\lambda)y = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Como $(0, 0)$ não satisfaz (3), então o sistema (4) admite solução não trivial. Logo, o determinante dos coeficientes deve ser nulo. Isto é :

$$\begin{vmatrix} 2 - 2\lambda & -\lambda \\ -\lambda & 2 - 2\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2 - 2\lambda)^2 - \lambda^2 = 0$$

$$\Rightarrow (2 - 2\lambda - \lambda)(2 - 2\lambda + \lambda) = 0 \Rightarrow (2 - 3\lambda)(2 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3} \text{ ou } \lambda = 2$$

Se $\lambda = \frac{2}{3}$, então $\left(2 - \frac{4}{3}\right)x - \frac{2}{3}y = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y = 0$. Portanto, $y = x$ e substituindo em (3), temos que $3x^2 = 3$. Logo $x = \pm 1$ e $y = x$. Donde, $(1, 1)$ e $(-1, -1)$ são candidatos a extremantes.

Se $\lambda = 2$, então $(2 - 4)x - 2y = 0 \Rightarrow -2x - 2y = 0$. Portanto, $y = -x$ e substituindo em (3), temos que $x^2 = 3$. Logo $x = \pm\sqrt{3}$ e $y = -x$. Donde, $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ e $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ também são candidatos a extremantes.

Como $C : x^2 + xy + y^2 = 3$ é um conjunto compacto e f é contínua, então f assume máximo absoluto e também mínimo absoluto em C .

Temos

$$f(1, 1) = f(-1, -1) = 2 < f(\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = f(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) = 6,$$

então os pontos mais próximos da origem são $(1, 1)$ e $(-1, -1)$; e os pontos mais afastados da origem são $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ e $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

5. Determine o ponto da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 12$, cuja soma das coordenadas seja máxima.

Solução

Queremos maximizar $f(x, y, z) = x + y + z$ sujeito a $g(x, y, z) = 0$, onde $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 12$.

Tanto f quanto g são funções de classe C^1 , então para aplicar Multiplicadores de Lagrange devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = 2\lambda x & (1) \\ 1 = 2\lambda y & (2) \\ 1 = 2\lambda z & (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 12 & (4) \end{cases}$$

Como $x, y, z \neq 0$, de (1), (2), (3) temos que $\lambda = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2z}$. Donde $x = y = z$. Substituindo em (4), $3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4$. Daí $x = \pm 2$, $x = y = z$. Portanto, os pontos $(2, 2, 2)$ e $(-2, -2, -2)$ são candidatos a extremantes.

Como a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ é um conjunto compacto e f é contínua, pelo teorema de Weierstrass tem-se que f admite máximo absoluto em mínimo absoluto na esfera. Como $f(2, 2, 2) = 6 > f(-2, -2, -2) = -6$, então $(2, 2, 2)$ é o ponto da esfera cuja soma das coordenadas é a máxima possível.

Exercícios

- Encontre os valores extremos absolutos de $f(x, y) = 4xy - x^2 - y^2 - 6x$ na região $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3x\}$.
- Determine os pontos de máximo e mínimo absolutos da função $f(x, y) = e^{-x^2-y^2} (x^2 + 2y^2)$ em $D: x^2 + y^2 \leq 9$.
- Encontre os extremantes absolutos de $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4$ no disco $D: \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 9\}$.
- A temperatura em qualquer ponto (x, y) do plano é dada por $T(x, y) = x^2 - x + 2y^2$. Qual a temperatura máxima e mínima num disco fechado de raio 1 centrado na origem?
- Estude os máximos e mínimos absolutos da função
 - $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$, restrita a $x^2 + y^2 = 1$

- (b) $f(x, y) = x^2 - 2y^2$, restrita a $x^2 + y^2 - 2x = 0$
6. Determine o ponto do elipsoide $x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$ que maximiza a soma $x + 2y + z$.
7. Em que pontos da elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a reta tangente forma com os eixos coordenados um triângulo de área mínima?
8. Seja $f(x, y) = 3x^2 + 2\sqrt{2}xy + 4y^2$.
- (a) Determine os extremantes locais de f em \mathbb{R}^2 .
- (b) A temperatura em uma chapa $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 9\}$ é dada por $f(x, y) = 3x^2 + 2\sqrt{2}xy + 4y^2$. Determine o máximo e mínimo valor da temperatura (se existirem) em D .

Respostas

1. Máximo absoluto é 0, em $(0, 0)$ e o mínimo absoluto é -16 em $(2, 0)$
2. Máximo absoluto é $18e^{-9}$ em $(0, 3)$ e $(0, -3)$; mínimo absoluto 0 em $(0, 0)$.
3. Máximo absoluto é $13 + 6\sqrt{2}$ em $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$; mínimo absoluto é 2 em $(1, 1)$.
4. Temperatura máxima é $\frac{9}{4}$ em $\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e temperatura mínima é $-\frac{1}{4}$ em $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.
5. (a) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ponto de mínimo; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ pontos de máximo
 (b) $(2, 0)$ ponto de máximo; $\left(\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ e $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ pontos de mínimo.
6. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
7. $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{b\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, -\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{b\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}, -\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)$
8. (a) $(0, 0)$ é ponto de mínimo local
 (b)

