



# Funções escalares de várias variáveis

## Extremos absolutos em compactos. Multiplicadores de Lagrange

### Objetivos:

- Teorema de Weierstrass; cálculo de máximos/mínimos absolutos em compactos
- Multiplicadores de Lagrange

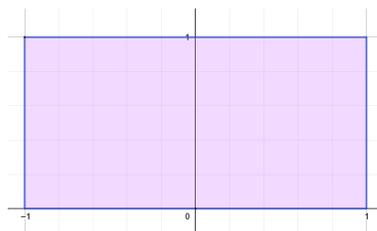
**Teorema (de Weierstrass):** Se  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua num conjunto compacto  $K \subset D$ , então  $f$  tem um valor máximo absoluto e também um valor mínimo absoluto em  $K$ .

### Método para encontrar extremantes absolutos em um conjunto compacto

1. Achar os pontos críticos no interior de  $K$ ,  $Int(K)$ , e achar os valores de  $f$  nestes pontos críticos.
2. Achar os valores máximos e mínimos de  $f$  fronteira de  $K$ ,  $Fr(K)$ .
3. Compare os valores obtidos no item 1) e 2). O maior deles será o valor máximo absoluto e o menor deles será o valor mínimo absoluto.

O conjunto fronteira de  $K$  pode ser um ponto, uma curva ou união de pontos e curvas. Portanto, um caminho natural para calcular os máximos e mínimos na fronteira é estudar a imagem da parametrização do conjunto.

**Exemplo:** Encontre os extremos absolutos da função  $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$  na região  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ .



**Figure 1:** O conjunto  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

Observe que o conjunto fronteira de  $K$  é a união dos segmentos:  $C_1 : \overline{(-1, 0)(1, 0)}$ ,  $C_2 : \overline{(1, 0)(1, 1)}$ ,  $C_3 : \overline{(1, 1)(-1, 1)}$  e  $C_4 : \overline{(-1, 1)(-1, 0)}$ .

Já o interior de  $K$  é a parte interna do retângulo, isto é,  $Int(K) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 < x < 1, 0 < y < 1\}$ .

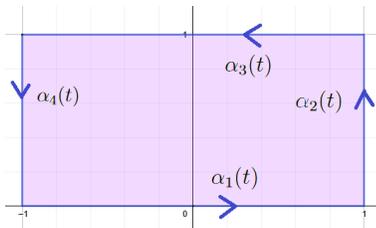
Como  $K \subset Dom(f) = \mathbb{R}^2$  é um conjunto compacto e  $f(x, y)$  é uma função contínua em  $K$ , então o Teorema de Weierstrass nos garante a existência de máximo e mínimo em  $K$ .

1. Calculemos o pontos críticos no interior de  $K$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 0 \\ 6y = 0 \end{cases}$$

Donde,  $x = y = 0$ . Como  $(0, 0) \notin Int(K)$ , não temos pontos críticos no interior do compacto.

2. Calculemos o máximos e mínimos na fronteira de  $K$ .



**Figure 2: Fronteira do conjunto  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$**

Observe que a fronteira de  $K$  é a união dos segmentos  $C_1 : \alpha_1(t) = (t, 0), t \in [-1, 1]$ ;  $C_2 : \alpha_2(t) = (1, t), t \in [0, 1]$ ,  $C_3 : \alpha_3(t) = (-t, 1), t \in [-1, 1]$  e  $C_4 : \alpha_4(t) = (-1, 1 - t), t \in [0, 1]$ . Estudemos cada segmento por separado:

- (a) Seja  $g_1(t) = f(\alpha_1(t)) = f(t, 0) = 2t^2$ ,  $t \in [-1, 1]$ . Donde  $g_1'(t) = 4t = 0 \iff t = 0$ . Como 0 é um ponto interior do intervalo  $[-1, 1]$ , os valores máximos e mínimos absolutos de  $f$  no segmento  $C_1$  serão atingidos no instante  $t = -1$ ,  $t = 0$  ou  $t = 1$ . Temos,  $g_1(-1) = f(-1, 0) = 2$ ,  $g_1(1) = f(1, 0) = 2$  e  $g_1(0) = f(0, 0) = 0$ .
- (b) Seja  $g_2(t) = f(\alpha_2(t)) = f(1, t) = 2 + 3t^2$ ,  $t \in [0, 1]$ . Donde  $g_2'(t) = 6t = 0 \iff t = 0$ . Como 0 é um extremo do intervalo  $[0, 1]$ , temos que os valores máximos e mínimos absolutos de  $f$  no segmento  $C_2$  serão atingidos no instante  $t = 0$  ou  $t = 1$ . Temos,  $g_2(0) = f(1, 0) = 2$  e  $g_2(1) = f(1, 1) = 5$ .

- (c) Seja  $g_3(t) = f(\alpha_3(t)) = f(-t, 1) = 2t^2 + 3$ ,  $t \in [-1, 1]$ . Onde  $g_3'(t) = 4t = 0 \iff t = 0$ . Como 0 é um ponto interior do intervalo  $[-1, 1]$ , temos que os valores máximos e mínimos absolutos de  $f$  no segmento  $C_3$  serão atingidos no instante  $t = -1$ ,  $t = 0$  ou  $t = 1$ . Temos,  $g_3(-1) = f(1, 1) = 5$ ,  $g_3(0) = f(0, 1) = 3$  e  $g_3(1) = f(-1, 1) = 5$ .
- (d) Seja  $g_4(t) = f(\alpha_4(t)) = f(-1, 1 - t) = 2 + 3(1 - t)^2$ ,  $t \in [0, 1]$ . Onde  $g_4'(t) = -6(1 - t) = 0 \iff t = 1$ . Como 1 é um extremo do intervalo  $[0, 1]$ , temos que os valores máximos e mínimos absolutos de  $f$  no segmento  $C_4$  serão atingidos no instante  $t = 0$  ou  $t = 1$ . Temos,  $g_4(0) = f(-1, 1) = 5$  e  $g_4(1) = f(-1, 0) = 2$ .

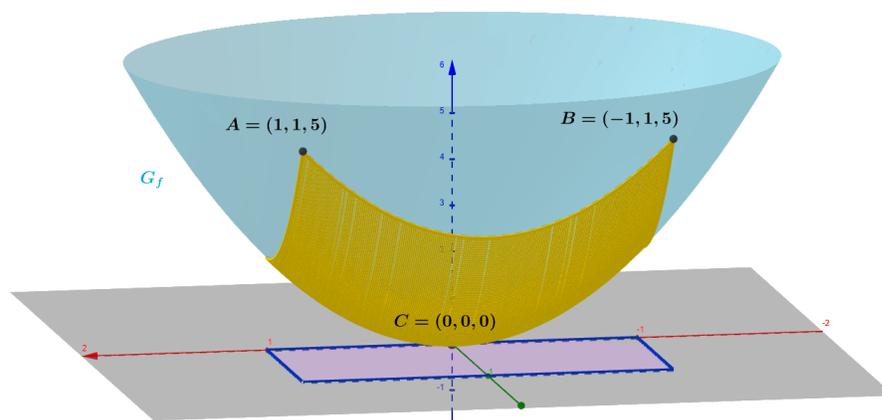
3. Resumindo:

pontos	$(-1, 0)$	$(0, 0)$	$(1, 0)$	$(1, 1)$	$(-1, 1)$	$(0, 1)$
valores	2	0	2	5	5	3

Comparando todos os valores da tabela, temos que o valor máximo absoluto em  $K$  é 5, atingido nos pontos  $(1, 1)$  e  $(-1, 1)$ . Já o valor mínimo absoluto em  $K$  é 0, atingido no ponto  $(0, 0)$ .

Observe que todos os valores são atingidos na fronteira de  $K$ , pois  $f$  não possui pontos críticos no interior de  $K$ .

Na figura a seguir o compacto  $K \subset \text{Dom}(f)$  está desenhado com cor roxa no plano  $z = 0$ , Já a imagem do retângulo e seu interior,  $f(K) \subset G_f$ , está desenhado com cor amarela. Observe como os pontos mais altos em  $f(K)$  são  $A = (1, 1, 5)$  e  $B = (-1, 1, 5)$ ; e o ponto mais baixo de  $f(K)$  é  $C = (0, 0, 0)$ .



**Figure 3: Extremantes absolutos em compactos**

Quando a fronteira do compacto é uma curva suave, existe um outro método para calcular os extremantes do item 2 do método para encontrar extremantes absolutos em um conjunto compacto. Esse novo método é devido a Lagrange.

**Máximos e mínimos condicionados com uma restrição:** Sejam  $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D$  aberto. Queremos extremar  $f(x, y)$  sujeito à condição  $g(x, y) = 0$ .

Dizemos que  $(x_0, y_0)$  é máximo local (respectivamente, mínimo local) de  $f$  sujeito à condição  $C : g(x, y) = 0$  se existir uma bola aberta  $B$  de centro  $(x_0, y_0)$ , tal que  $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$  (respectivamente,  $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ ),  $\forall (x, y) \in B \cap C$ .

**Teorema de Lagrange:** Se  $f, g$  são de classe  $C^1$  em  $D$ ,  $C : g(x, y) = 0$  é curva de nível da função  $g$  e

(a)  $\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$  em  $C$

(b)  $(x_0, y_0)$  é um extremante local de  $f$  sujeito à condição  $g(x, y) = 0$

Então,

$$\nabla f(x_0, y_0) \parallel \nabla g(x_0, y_0).$$

Equivalentemente, existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  (dito multiplicador de Lagrange), tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

Observação:

- (I) Se a curva  $C : g(x, y) = 0$  for compacta, o Teorema de Weierstrass garante a existência de extremantes absolutos condicionados. Portanto, para encontrar os candidatos  $(x_0, y_0)$  a extremantes locais de  $f(x, y)$  sujeito à condição  $g(x, y) = 0$ , basta com resolver o seguinte sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{array} \right.$$

para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ , sempre que  $\nabla g(x, y) \neq \vec{0}$  na curva de nível. Depois devemos fazer uma análise dos dados para achar os extremantes globais.

- (II) Se a curva  $C : g(x, y) = 0$  não for compacta (por exemplo  $xy = 0$ ), o Teorema de Weierstrass não se aplica. Portanto não está garantida a existência de extremantes absolutos na curva  $C$ .
- (III) Sejam  $f, g : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D$  aberto, funções de classe  $C^1$  de três variáveis. Então o conjunto  $C : g(x, y, z) = 0$  é uma superfície de nível. Para encontrar os candidatos  $(x_0, y_0, z_0)$  a extremantes de  $f(x, y, z)$  sujeito à condição  $g(x, y, z) = 0$ ,

devemos resolver o sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \lambda \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \end{array} \right.$$

para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ , sempre que  $\nabla g(x, y, z) \neq \vec{0}$  na superfície de nível.

Exemplo: Determine o máximo absoluto de  $f(x, y) = x^2 - y^2$ , sujeito à condição  $3x^2 + 2y^2 = 1$ .

Note que  $f$  e  $g(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 1$  são de classe  $C^1$  e  $\nabla g(x, y) = (6x, 4y) \neq (0, 0)$  para todo  $3x^2 + 2y^2 = 1$ . O método dos multiplicadores de Lagrange nos diz que o candidato a máximo absoluto condicionado deve verificar as equações

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{array} \right.$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} (2x, -2y) = \lambda (6x, 4y) \\ 3x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x = 6\lambda x \quad (1) \\ -2y = 4\lambda y \quad (2) \\ 3x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \quad (3) \end{array} \right.$$

De (1) temos que  $x = 0$  ou  $\lambda = \frac{1}{3}$ . Substituindo  $x = 0$  em (3) obtemos  $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Portanto os pontos  $(0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$  e  $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$  são candidatos a máximo.

Substituindo  $\lambda = \frac{1}{3}$  em (2) obtemos  $-2y = \frac{4}{3}y$ , donde  $y = 0$ . Substituindo  $y = 0$  em (3), temos que  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Portanto os pontos  $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$  e  $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$  também são candidatos a máximo.

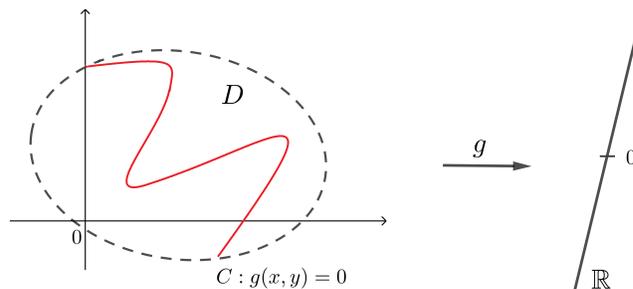
Vamos calcular os valores de  $f$  nesses pontos:

pontos	$(0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$	$(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$	$(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$	$(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$
valores	$-1/2$	$-1/2$	$1/3$	$1/3$

Comparando os valores da tabela, temos que o valor máximo de  $f$  na curva  $C : 3x^2 + 2y^2 - 1 = 0$  é  $1/3$ , atingido nos pontos  $(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ .

**Interpretação geométrica do método dos multiplicadores de Lagrange:** Os valores extremos absolutos de  $f(x, y)$  restrito à condição  $g(x, y) = 0$  são atingidos nos pontos onde os vetores gradientes de  $f$  e  $g$  são paralelos. Isto é, nos pontos onde a curva  $g(x, y) = 0$  for tangente a uma curva de nível de  $f$ .

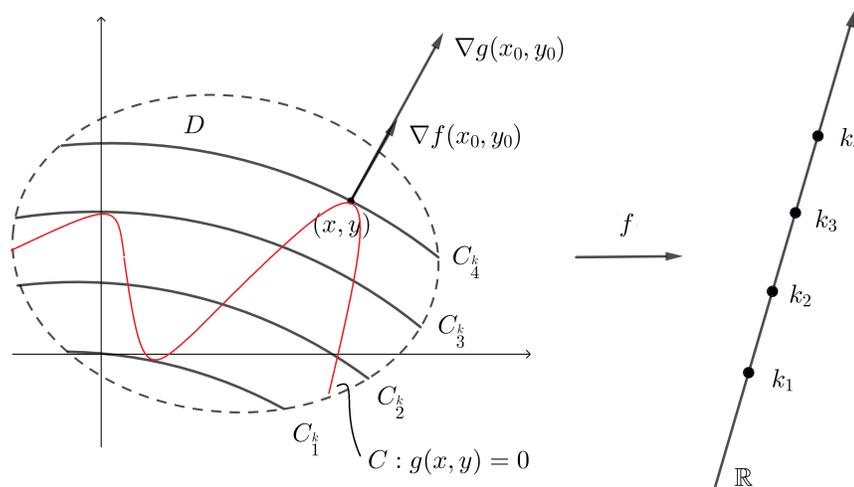
Com efeito, seja  $C : g(x, y) = 0$  a curva de nível  $k = 0$  de  $g$  verificando  $C \subset D$ .



**Figure 4: Curva de nível  $g(x, y) = 0$**

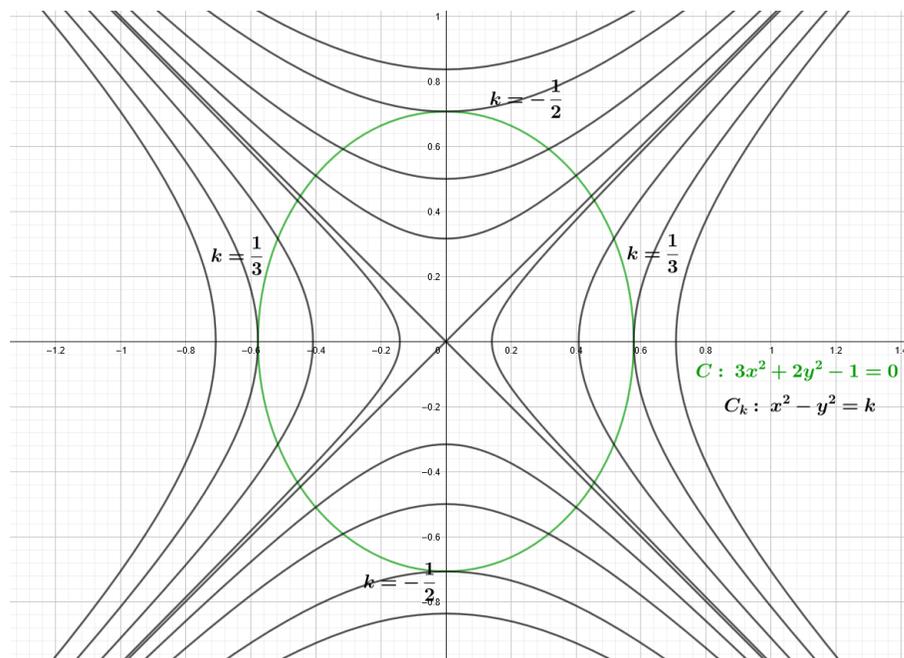
Sejam  $C_{k_1}, C_{k_2}, C_{k_3}, C_{k_4}, \dots$  curvas de nível de  $f$  com  $k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < \dots$ .

A figura a seguir mostra um dos pontos extremos condicionados. Observe que na interseção da curva restrição com a curva de nível  $C_{k_1}$  e na interseção com a curva  $C_{k_3}$  temos mais dois extremos condicionados. Para detetar qual dos três pontos é de máximo e qual é de mínimo absoluto, precisamos conhecer apenas os valores dos níveis  $k_1$  e  $k_4$ , pois o nível  $k_3$  está entre  $k_1$  e  $k_4$ . Portanto, se  $k_1 < k_4$ , o ponto  $(x, y)$  é ponto de máximo absoluto (condicionado). Já se  $k_1 > k_4$ , o ponto  $(x, y)$  é ponto de mínimo absoluto (condicionado).



**Figure 5: Interpretação geométrica do método dos Multiplicadores de Lagrange**

Exemplo: Identifique no mapa de contorno de  $f(x, y) = x^2 - y^2$  os extremantes condicionados a  $3x^2 + 2y^2 = 1$ .



**Figure 6: Extremantes de  $f(x, y) = x^2 - y^2$  condicionado a  $3x^2 + 2y^2 = 1$**

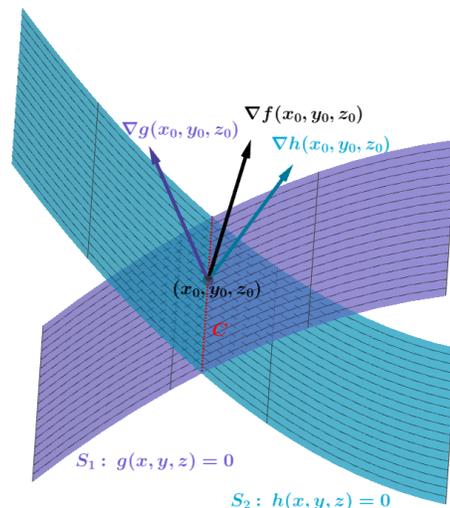
**Máximos e mínimos condicionados com duas restrições:** Sejam  $f, g, h : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D$  aberto. Queremos extremar  $f(x, y, z)$  sujeito às condições  $g(x, y, z) = 0$  e  $h(x, y, z) = 0$ .

Sejam  $S_1 : g(x, y, z) = 0$ , uma superfície de nível de  $g$ , e  $S_2 : h(x, y, z) = 0$ , uma superfície de nível de  $h$ . E seja  $C = S_1 \cap S_2$  a curva interseção das duas superfícies.

Se  $f, g, h$  são de classe  $C^1$  em  $D$  aberto de  $\mathbb{R}^3$  com  $\nabla g(x, y, z) \neq \vec{0}$  em  $S_1$  e  $\nabla h(x, y, z) \neq \vec{0}$  em  $S_2$ . Temos que

$$\nabla g(x_0, y_0, z_0) \perp S_1 \text{ em } (x_0, y_0, z_0) \text{ e}$$

$$\nabla h(x_0, y_0, z_0) \perp S_2 \text{ em } (x_0, y_0, z_0).$$



**Figure 7: Multiplicadores de Lagrange com duas restrições**

Se  $(x_0, y_0, z_0)$  é um extremante local de  $f(x, y, z)$  sujeito a  $g(x, y, z) = 0$  e  $h(x, y, z) = 0$ , então

- (a)  $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$  está no plano determinado por  $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$  e  $\nabla h(x_0, y_0, z_0)$ . Isto é,  $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \mu \nabla h(x_0, y_0, z_0)$ , para alguns  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .
- (b)  $g(x_0, y_0, z_0) = 0$
- (c)  $h(x_0, y_0, z_0) = 0$

Portanto, para encontrar os candidatos a extremantes locais de  $f(x, y, z)$  sujeito às condições  $g(x, y, z) = 0$  e  $h(x, y, z) = 0$ , devemos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Exemplo: Encontre os pontos de máximo e mínimo de  $f(x, y, z) = x + y + z$ , sujeito às restrições  $x^2 + y^2 = 2$  e  $x + z = 1$ .

Devemos resolver o seguinte sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

onde  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2$  e  $h(x, y, z) = x + z - 1$ .

Temos

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x + \mu & (1) \\ 1 = 2\lambda y & (2) \\ 1 = \mu & (3) \\ x^2 + y^2 = 2 & (4) \\ x + z = 1 & (5) \end{cases}$$

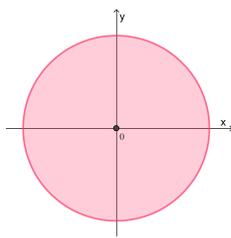
De (1) e (3), temos  $2\lambda x = 0$ , donde  $\lambda = 0$  ou  $x = 0$ . Se  $\lambda = 0$  então de (2) temos  $1 = 0$ , o que é absurdo. Logo,  $x = 0$ . De (4) e (5) termos  $y = \pm\sqrt{2}, z = 1$ . Assim,  $(0, \sqrt{2}, 1)$  e  $(0, -\sqrt{2}, 1)$  são candidatos a extremantes. Como  $f$  é contínua e a curva  $C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x + z = 1 \end{cases}$  é um conjunto compacto, então pelo teorema de Weierstrass temos máximo e mínimo absolutos. Como  $f(0, \sqrt{2}, 1) = \sqrt{2} + 1 > f(0, -\sqrt{2}, 1) = -\sqrt{2} + 1$ , então  $f$  tem máximo  $1 + \sqrt{2}$  em  $(0, \sqrt{2}, 1)$  e mínimo de  $1 - \sqrt{2}$  em  $(0, -\sqrt{2}, 1)$ .

## Exemplos

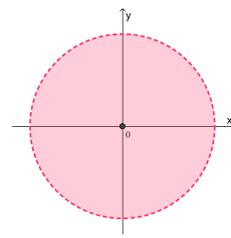
1. Uma placa metálica tem a forma de um disco  $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Ela é aquecida de modo que a temperatura num ponto  $(x, y)$  é dada por  $T(x, y) = 3x^2 + 2y^2 + \frac{y^3}{9}$ . Encontre a maior e a menor temperatura na placa.

### Solução

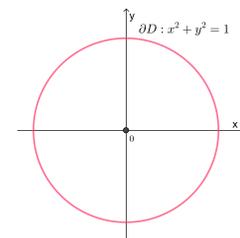
Como  $D$  é um conjunto compacto e  $T(x, y)$  é uma função contínua em  $D$ , então o Teorema de Weierstrass nos garante a existência de máximo e mínimo em  $D$ .



**Figure 8:**  
 $D : x^2 + y^2 \leq 1$



**Figure 9:**  
 $Int(D) : x^2 + y^2 < 1$



**Figure 10:**  
 $Fr(D) : x^2 + y^2 = 1$

Em  $Int(D)$ , no interior de  $D$ , temos  $\frac{\partial T}{\partial x}(x, y) = 6x$ ,  $\frac{\partial T}{\partial y}(x, y) = 4y + \frac{y^2}{3}$ .

Os pontos críticos em  $Int(D)$  são encontrados resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x = 0 \\ 4y + \frac{y^2}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y(4 + \frac{y}{3}) = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \quad \text{ou} \quad y = -12$$

Portanto,  $(0, 0), (0, -12)$  são as soluções. Como  $(0, -12) \notin D$ , então  $(0, 0)$  é o único ponto crítico de  $T$  em  $Int(D)$ . Temos  $T(0, 0) = 0$ .

Na fronteira de  $D$  ( $Fr(D)$ ) é a circunferência de centro  $(0, 0)$  e raio 1. Uma parametrização da curva seria  $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$ .

Logo, a temperatura em  $Fr(D)$  é dada por

$$T(t) = T(\cos t, \sin t) = 3 \cos^3 t + 2 \sin^2 t + \frac{\sin^3 t}{3}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Em  $]0, 2\pi[$ :  $T'(t) = 0 \Leftrightarrow 6 \cos t(-\sin t) + 4 \sin t \cos t + \frac{3 \sin^2 t}{3} \cos t = 0 \Leftrightarrow$   
 $-2 \sin \cos t + \sin^2 t \cos t = 0 \Leftrightarrow \sin t \cos t(-2 + \sin t) = 0 \Rightarrow \sin t \cos t =$   
 $0$  ou  $\underbrace{\sin t = 2}_{\text{absurdo!}} \Rightarrow \sin t \cos t = 0 \quad 0 < t < 2\pi \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\pi}{2}, \quad t = \frac{3\pi}{2}, \quad t = \pi.$

Temos

$$T\left(\frac{\pi}{2}\right) = T(0, 1) = 2 + \frac{1}{9} = \frac{19}{9}, T(\pi) = T(-1, 0) = 3, T\left(\frac{3\pi}{2}\right) = T(0, -1) = \frac{17}{9}$$

Na fronteira de  $[0, 2\pi]$ : 0 e  $2\pi$

Temos  $T(0) = T(1, 0) = 3, T(2\pi) = T(1, 0) = 3.$

Comparando todos os valores encontrados, temos

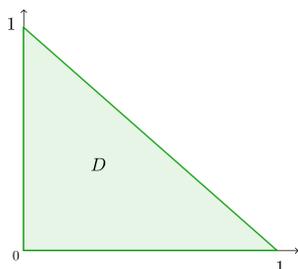
$$0 = T(0, 0) < 3 = T(1, 0) = T(-1, 0).$$

Assim, a temperatura mínima é 0 e ocorre em  $(0, 0)$  e a temperatura máxima é 3, ocorrendo em  $(1, 0)$  e  $(-1, 0)$ .

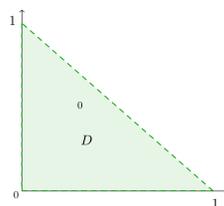
2. Encontre o máximo e o mínimo da função  $f(x, y) = x^2 + 3xy - 3x$  definida em  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ .

### Solução

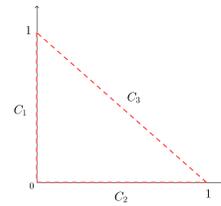
Como a função  $f$  é contínua no compacto  $D$ , então pelo teorema de Weierstrass existem máximo e mínimo em  $D$ .



**Figure 11:**  
 $D : x \geq 0, y \geq 0,$   
 $x + y \leq 1$



**Figure 12:**  
 $D : x, y > 0,$   
 $x + y < 1$



**Figure 13:**  
 $D : 0 \leq x \leq 1 \wedge y = 0,$   
 $0 \leq y \leq 1 \wedge x = 0,$   
 $0 \leq x \leq 1 \wedge y = 1 - x$

No interior de  $D$ , os pontos críticos são encontrados resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x + 3y - 3 = 0 & (1) \\ 3x = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow x = 0 \Rightarrow 3y - 3 = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (0, 1).$$

Como  $(0, 1) \notin \text{Int}(D)$ , então não existem pontos críticos de  $f$  no interior de  $D$ . Portanto, os extremantes absolutos estão na fronteira de  $D$ .

Temos  $Fr(D) = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ , onde

$$C_1 : x = 0, 0 \leq y \leq 1; \quad C_2 : y = 0, 0 \leq x \leq 1; \quad C_3 : y = 1 - x, 0 \leq x \leq 1.$$

Em  $C_1$  :  $g_1(x) = f(x, y) = f(0, y) = 0, 0 \leq y \leq 1$ . Função constante.

Em  $C_2$  :  $g_2(x) = f(x, y) = f(x, 0) = x^2 - 3x, 0 \leq x \leq 1$ . O gráfico da função é uma parábola com valor máximo  $f(0, 0) = 0$  e mínimo  $f(1, 0) = -2$ .

Em  $C_3$  :  $g_3(x) = f(x, y) = f(x, 1-x) = x^2 + 3x(1-x) - 3x = x^2 + 3x - 3x^2 - 3x = -2x^2, 0 \leq x \leq 1$ . O gráfico da função é uma parábola com valor máximo  $f(0, 1) = 0$  e mínimo  $f(1, 0) = -2$ .

Portanto, o valor máximo de  $f$  em  $Fr(D)$  é 0 e ocorre em todos os pontos da curva  $C_1$ . Já o valor mínimo é  $-2$  e é atingido no ponto  $(1, 0)$ .

3. Determine o máximo de  $f(x, y) = x + y$ , sujeito à condição  $x^2 + y^2 = 1$ .

### Solução

Seja  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ . Queremos maximizar  $f(x, y) = x + y$  sujeito a  $g(x, y) = 0$ .

Tanto  $f$  quanto  $g$  são funções de classe  $C^1$ , então para aplicar Multiplicadores de Lagrange devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} (1, 1) = \lambda(2x, 2y) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} 1 = 2\lambda x & (1) \\ 1 = 2\lambda y & (2) \\ x^2 + y^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

$$(1), (2) \xrightarrow[4 \neq 0]{x \neq 0} \lambda = \frac{1}{2x}, \lambda = \frac{1}{2y} \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y \Rightarrow 2x^2 = 1.$$

Portanto,  $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, x = y$ . Daí,  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  e  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  são os candidatos a extremantes locais.

Como  $f(x, y) = x + y$  é contínua e  $C : x^2 + y^2 = 1$  é um conjunto compacto, então pelo teorema de Weierstrass  $f$  assume máximo absoluto e também mínimo absoluto em  $C$ . Aliás,

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} > f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2},$$

então o ponto de máximo é  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  e o valor máximo é  $\sqrt{2}$ .

4. Encontre os pontos da elipse  $x^2 + xy + y^2 = 3$  mais próximos e mais afastados da origem.

### Solução

A distância de  $(x, y)$  à origem é dada por  $d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Então, devemos minimizar  $f(x, y) = d^2(x, y) = x^2 + y^2$  sujeito a  $g(x, y) = 0$ , onde  $g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3$ .

Tanto  $f$  quanto  $g$  são funções de classe  $C^1$ , então para aplicar Multiplicadores de Lagrange devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2x = \lambda(2x + y) & (1) \\ 2y = \lambda(x + 2y) & (2) \\ x^2 + xy + y^2 = 3 & (3) \end{cases}$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} (2 - 2\lambda)x - \lambda y = 0 \\ -\lambda x + (2 - 2\lambda)y = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Como  $(0, 0)$  não satisfaz (3), então o sistema (4) admite solução não trivial. Logo, o determinante dos coeficientes deve ser nulo. Isto é :

$$\begin{vmatrix} 2 - 2\lambda & -\lambda \\ -\lambda & 2 - 2\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2 - 2\lambda)^2 - \lambda^2 = 0$$

$$\Rightarrow (2 - 2\lambda - \lambda)(2 - 2\lambda + \lambda) = 0 \Rightarrow (2 - 3\lambda)(2 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3} \text{ ou } \lambda = 2$$

Se  $\lambda = \frac{2}{3}$ , então  $\left(2 - \frac{4}{3}\right)x - \frac{2}{3}y = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y = 0$ . Portanto,  $y = x$  e substituindo em (3), temos que  $3x^2 = 3$ . Logo  $x = \pm 1$  e  $y = x$ . Donde,  $(1, 1)$  e  $(-1, -1)$  são candidatos a extremantes.

Se  $\lambda = 2$ , então  $(2 - 4)x - 2y = 0 \Rightarrow -2x - 2y = 0$ . Portanto,  $y = -x$  e substituindo em (3), temos que  $x^2 = 3$ . Logo  $x = \pm\sqrt{3}$  e  $y = -x$ . Donde,  $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$  e  $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$  também são candidatos a extremantes.

Como  $C : x^2 + xy + y^2 = 3$  é um conjunto compacto e  $f$  é contínua, então  $f$  assume máximo absoluto e também mínimo absoluto em  $C$ .

Temos

$$f(1, 1) = f(-1, -1) = 2 < f(\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = f(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) = 6,$$

então os pontos mais próximos da origem são  $(1, 1)$  e  $(-1, -1)$ ; e os pontos mais afastados da origem são  $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$  e  $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ .

5. Determine o ponto da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ , cuja soma das coordenadas seja máxima.

### Solução

Queremos maximizar  $f(x, y, z) = x + y + z$  sujeito a  $g(x, y, z) = 0$ , onde  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 12$ .

Tanto  $f$  quanto  $g$  são funções de classe  $C^1$ , então para aplicar Multiplicadores de Lagrange devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = 2\lambda x & (1) \\ 1 = 2\lambda y & (2) \\ 1 = 2\lambda z & (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 12 & (4) \end{cases}$$

Como  $x, y, z \neq 0$ , de (1), (2), (3) temos que  $\lambda = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2z}$ . Donde  $x = y = z$ . Substituindo em (4),  $3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4$ . Daí  $x = \pm 2$ ,  $x = y = z$ . Portanto, os pontos  $(2, 2, 2)$  e  $(-2, -2, -2)$  são candidatos a extremantes.

Como a esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 12$  é um conjunto compacto e  $f$  é contínua, pelo teorema de Weierstrass tem-se que  $f$  admite máximo absoluto em mínimo absoluto na esfera. Como  $f(2, 2, 2) = 6 > f(-2, -2, -2) = -6$ , então  $(2, 2, 2)$  é o ponto da esfera cuja soma das coordenadas é a máxima possível.

## Exercícios

- Encontre os valores extremos absolutos de  $f(x, y) = 4xy - x^2 - y^2 - 6x$  na região  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3x\}$ .
- Determine os pontos de máximo e mínimo absolutos da função  $f(x, y) = e^{-x^2-y^2} (x^2 + 2y^2)$  em  $D: x^2 + y^2 \leq 9$ .
- Encontre os extremantes absolutos de  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4$  no disco  $D: \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 9\}$ .
- A temperatura em qualquer ponto  $(x, y)$  do plano é dada por  $T(x, y) = x^2 - x + 2y^2$ . Qual a temperatura máxima e mínima num disco fechado de raio 1 centrado na origem?
- Estude os máximos e mínimos absolutos da função
  - $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$ , restrita a  $x^2 + y^2 = 1$

- (b)  $f(x, y) = x^2 - 2y^2$ , restrita a  $x^2 + y^2 - 2x = 0$
6. Determine o ponto do elipsoide  $x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$  que maximiza a soma  $x + 2y + z$ .
7. Em que pontos da elipse de equação  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  a reta tangente forma com os eixos coordenados um triângulo de área mínima?
8. Seja  $f(x, y) = 3x^2 + 2\sqrt{2}xy + 4y^2$ .
- (a) Determine os extremantes locais de  $f$  em  $\mathbb{R}^2$ .
- (b) A temperatura em uma chapa  $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 9\}$  é dada por  $f(x, y) = 3x^2 + 2\sqrt{2}xy + 4y^2$ . Determine o máximo e mínimo valor da temperatura (se existirem) em  $D$ .

### Respostas

1. Máximo absoluto é 0, em  $(0, 0)$  e o mínimo absoluto é  $-16$  em  $(2, 0)$
2. Máximo absoluto é  $18e^{-9}$  em  $(0, 3)$  e  $(0, -3)$ ; mínimo absoluto 0 em  $(0, 0)$ .
3. Máximo absoluto é  $13 + 6\sqrt{2}$  em  $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ ; mínimo absoluto é 2 em  $(1, 1)$ .
4. Temperatura máxima é  $\frac{9}{4}$  em  $\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  e temperatura mínima é  $-\frac{1}{4}$  em  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ .
5. (a)  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  ponto de mínimo;  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ,  $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  pontos de máximo  
 (b)  $(2, 0)$  ponto de máximo;  $\left(\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$  e  $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$  pontos de mínimo.
6.  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
7.  $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{b\sqrt{2}}{2}\right)$ ,  $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, -\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)$ ,  $\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{b\sqrt{2}}{2}\right)$ ,  $\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}, -\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)$
8. (a)  $(0, 0)$  é ponto de mínimo local  
 (b)

