Funções escalares de várias variáveis

Cálculo de limites. Continuidade

Objetivos:

- teorema do confronto; teorema do anulamento;
- coordenadas polares; coordenadas esféricas;
- continuidade

Teorema do Confronto: Seja (a,b) um ponto de acumulação de D. Se $f(x,y) \leqslant g(x,y) \leqslant h(x,y)$ em $B_r(a,b)$ e se $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) = L$, então $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L$.

Teorema do Anulamento: Seja (a,b) um ponto de acumulação de D. Se $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 0$ e $g(x,y)$ é limitada em $B_r(a,b)$, isto é, se $|g(x,y)| \leqslant M$, $\forall (x,y) \in B_r(a,b)$, então $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)g(x,y) = 0$.

Observação

(I) O Teorema do confronto e o Teorema do anulamento são válidos em qualquer dimensão.

(II) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} |f(x,y)| = 0$. Válido em qualquer dimensão.

(III) No caso de funções de duas variáveis, podemos calcular o limite passando a coordenadas polares

$$x = \rho \cos\theta \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta,$$

onde $\rho \geq 0$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. Por exemplo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y \cos(x^2+y^2) = \lim_{\rho\to 0} \rho \operatorname{sen}\theta \cos(\rho^2) = 0,$$

pois $|\rho \operatorname{sen}\theta \cos(\rho^2)| \leq \rho$ para todo θ.

(IV) No caso de funções de três variáveis, podemos calcular o limite passando a coordenadas esféricas

$$x = \rho \cos\phi \cos\theta \quad y = \rho \cos\phi \,\text{sen}\,\theta \quad z = \rho \,\text{sen}\,\phi,$$

onde $\rho \geq 0$, $\phi \in [0, \pi]$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. Por exemplo:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} = \lim_{\rho\to 0} \rho \cos^2\phi \,\text{sen}\,\phi \cos\theta \,\text{sen}\,\theta = 0,$$

pois $|\rho \cos^2\phi \,\text{sen}\,\phi \cos\theta \,\text{sen}\,\theta| \leq \rho$ para todo θ, ϕ.

Continuidade: Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $P \in D$ um ponto de acumulação de D. Dizemos que f é contínua em P se

$$\lim_{X\to P} f(X) = f(P)$$

Se f for contínua em todos os pontos de um aberto $A \subset D$, dizemos que f é contínua em A.

Se f for contínua em todos os pontos do domínio D, dizemos que f é contínua.

Propriedades: Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ contínuas em $P \in D$. Então as seguintes funções também são contínuas em P:

(a) $f \pm g$

(b) $f \cdot g$

(c) $\dfrac{f}{g}$, desde que $g(P) \neq 0$

Observações:

(I) Uma função polinomial de duas variáveis é uma soma de termos da forma $cx^n y^m$, com $c \in \mathbb{R}$, inteiros não negativos. Portanto, usando propriedades de funções contínuas, segue que toda função polinomial é contínua em $\mathbb{R}^2$.

(II) Analogamente, as funções polinomiais de n variáveis são contínuas em $\mathbb{R}^n$.

(II) Uma função racional é o quociente de duas funções polinomiais. Portanto, toda função racional é contínua nos pontos onde o denominador não se anula, isto é, em seu domínio.

Teorema: Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tais que $Im(f) \subset E$. Se f for contínua em P e g contínua em $f(P)$, então a composta $h = g \circ f$ é contínua em P.

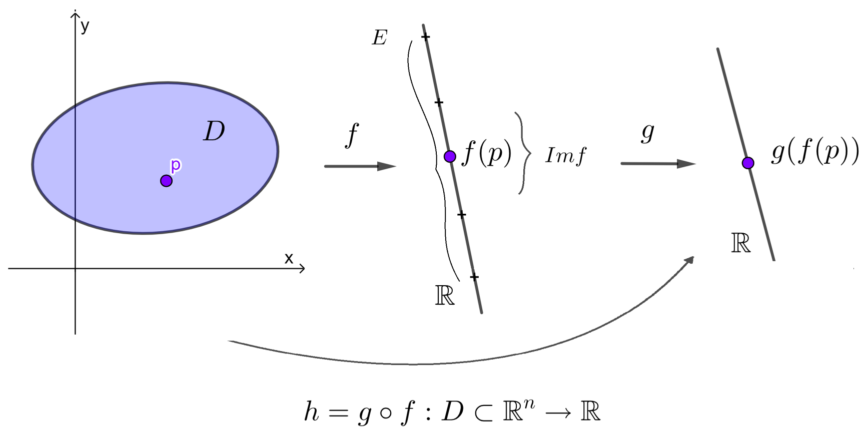


Figure 1: Continuidade da função composta

Exemplos

1. Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\,\text{sen}\,\dfrac{1}{x^2+y^2}$, se existir.

   Solução: Temos

   $$0 < \left| x\,\text{sen}\,\frac{1}{x^2+y^2} \right| = |x| \underbrace{|\,\text{sen}\,\frac{1}{x^2+y^2}\,|}_{\leq 1} \leqslant |x|$$

   Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 0$, então pelo Teorema do Confronto, temos $\lim \left| x\,\text{sen}\,\frac{1}{x^2+y^2} \right| = 0$, donde $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\,\text{sen}\,\dfrac{1}{x^2+y^2} = 0$

2. Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^3}{x^2+y^2}$, se existir.

   Solução: Temos que $0 \leq y^2 \leq y^2 + x^2$, pelo que $\left| \dfrac{y^2}{y^2+x^2} \right| \leq 1$. Aliás, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$, então pelo Teorema do Anulamento,

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y \frac{y^2}{x^2+y^2} = 0$$

3. Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y \ln{(x^2+y^2)}$, se existir.

   Solução: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y \ln{(x^2+y^2)} = \lim\limits_{\rho\to 0} \rho\,\text{sen}\,\theta \ln{(\rho^2)} = 0$, pois

   $$\left| \rho\,\text{sen}\,\theta \ln{(\rho^2)} \right| \leq \rho \ln{(\rho^2)}$$

e $\lim_{\rho\to 0}\rho \ln(\rho^2) = 0$ aplicando L'Hopital.

4. Seja $f(x, y)$ contínua, então $\text{sen}(f(x, y))$, $\ln(f(x, y))$, $\sqrt{f(x, y)}$ são funções contínuas.

5. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{3x^2+3y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

   Determine o conjunto dos pontos de continuidade de f.

   Solução: Observemos que $D_f = \mathbb{R}^2$. Por propriedades de continuidade, segue que f é contínua em $(x,y) \neq (0,0)$. Ora, Vimos na Aula 4, Exemplo 4, que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Logo, f é continua em $\mathbb{R}^2$.

6. Determine o conjunto dos pontos de continuidade de $f(x, y) = \ln \frac{x-y}{x^2+y^2}$.

   Solução: O domínio de f é determinado pela desigualdade $\frac{x-y}{x^2+y^2} > 0, \quad (x,y) \neq (0,0)$, donde $x > y$. Então, $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > y\}$

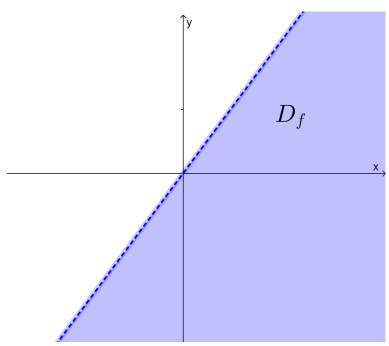


Figure 2: Domínio função $f(x,y) = \ln \frac{x-y}{x^2+y^2}$

   A função f é a composta das funções $h(u) = \ln u$ e $g(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$. Como $g(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$ é contínua em D_f por ser racional e $h(u) = \ln u$ é contínua em $\mathbb{R}^+$ por ser logarítmica, então a composta $f = h \circ g$ é contínua em D_f.

7. Determine o conjunto dos pontos de continuidade de

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2+1, & \text{, se } x^2+y^2 \le 4 \\ 0, & \text{se } x^2+y^2 > 4 \end{cases}$$

   Solução: Temos $D_f = D_1 \cup D_2 \cup C$, onde $D_1 : x^2 + y^2 > 4$, $D_2 : x^2 + y^2 < 4$ e $C : x^2 + y^2 = 4$.

   Temos:

   i f é contínua em D_1, pois $f(x,y) = 0$ (função constante) em D_1;

ii f é contínua em D_2, pois $f(x,y)$ é uma função polinomial em D_2;

iii Temos $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1 = 4 + 1 = 5$ em C. Seja $(a,b) \in C$.
Então $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 5$ ao longo de C. Seja C_1 uma curva passando por (a,b) e contida em D_1. Logo, $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 0 \neq 5$, ao longo de C_1.
Assim, f não é contínua em C e portanto, o conjunto de continuidade de f é $D_1 \cup D_2 = \mathbb{R}^2 - \{(x,y); x^2 + y^2 = 4\}$.

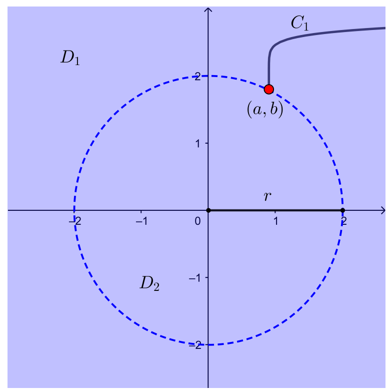


Figure 3: Continuidade da função composta

Exercícios

1. Calcule, se possível, os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^3 - 2x^2y + 3y^2x - 2y^3}{x^2+y^2}$

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{x^3}{x^2+y^4}}$

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \arccos \dfrac{x}{x+y}$

(e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sec \dfrac{\pi(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

(f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 \operatorname{sen}^2 x}{x^2+y^4}$

(g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, por coordenadas polares.

(h) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x \operatorname{sen}(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}$, por coordenadas esféricas.

2. Sabendo que: $1 - \frac{x^3y^2}{3} \leqslant \frac{\arctan(xy)}{xy} < 1$. Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\arctan(xy)}{xy}$

3. A função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad , & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ é contínua em $(0,0)$?

4. A função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}\,(xy)}{xy}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad , & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ é contínua em $(0,0)$?

5. Determine o conjunto dos pontos de continuidade de

   (a) $f(x,y) = \ln \frac{x+y}{x^2-y^2}$

   (b) $f(x,y) = \sqrt{y - \frac{1}{x}}$

6. Discuta a continuidade das funcões abaixo:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{x^4y^2}{x^8+y^4}$, se $(x,y) \neq (0,0)$; $f(0,0) = 0$

   (b) $f(x,y) = \dfrac{\text{sen}\,(x^2+y^2)}{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}$, se $(x,y) \neq (0,0)$; $\quad f(0,0) = 2$

   (c) $f(x,y) = \dfrac{y^4+3x^2y^2+2yx^3}{(x^2+y^2)^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$; $f(0,0) = 0$

   (d) $f(x,y) = e^{\frac{1}{x^2+y^2-1}}$, se $x^2+y^2 < 1$; $f(x,y) = 0$, se $x^2+y^2 \geqslant 1$.

7. Calcule o valor de k para que a função dada seja continua em $(0,0)$:

   (a) $f(x,y) = (x^2+y^2)\,\text{sen}\,\frac{1}{xy}$, $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = k$

   (b) $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{\sqrt{y^2+1}-1}$, $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = k-4$.

Respostas

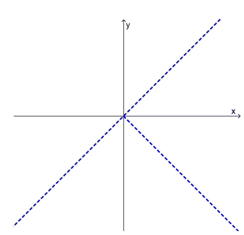
1. (a) 0
   (b) 0
   (c) 1
   (d) $\pi/3$
   (e) 1
   (f) 0
   (g) 0
   (h) 0

2. 1.

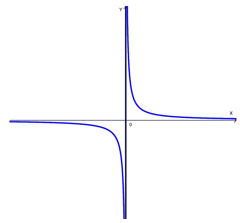
3. Não

4. Não

5. (a) $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $y < x$, $x \neq -y$



   (b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; y \geq \frac{1}{x}$, $x > 0$ ou $y \leq \frac{1}{x}$, $x < 0$



6. (a) Não é em $(0,0)$
   (b) É em $\mathbb{R}^2$
   (c) Não é em $(0,0)$
   (d) É em $\mathbb{R}^2$

7. (a) $k=0$
   (b) $k=4$