Funções escalares de várias variáveis

Extremantes locais. Classificação de prontos críticos

Objetivos:

- definição de máximo e mínimo global;
- definição de máximo e mínimo local; definição de ponto de sela;
- função hessiana; classificação de pontos críticos;
- cálculo de máximos/mínimos absolutos em abertos.

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $(a,b) \in D$.

Definição 1: Dizemos que $(a,b) \in D$ é ponto de máximo global ou absoluto de f se

$$f(x,y) \leqslant f(a,b), \quad \forall (x,y) \in D.$$

Neste caso, $f(a,b)$ é o valor máximo de f.

Definição 2: Dizemos que $(a,b) \in D$ é ponto de mínimo global ou absoluto de f se

$$f(x,y) \geqslant f(a,b), \quad \forall (x,y) \in D.$$

Neste caso, $f(a,b)$ é o valor mínimo de f.

Exemplo:

Seja $f(x,y) = x^2 + y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Temos

$$f(0,0) = 0 \leqslant x^2 + y^2 = f(x,y),$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Logo $(0,0)$ é ponto de mínimo global de f.

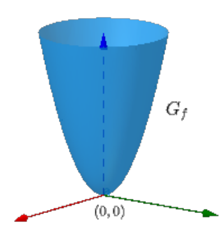

Figure 1: Mínimo global

Exemplo:

Seja $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Temos

$$f(0,0) = 4 \geqslant 4 - x^2 - y^2 = f(x,y),$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Logo, $(0,0)$ é ponto de máximo global de f.

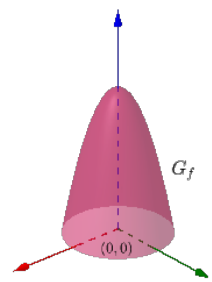

Figure 2: Máximo global

Definição 3: Dizemos que $(a,b) \in D$ é ponto de máximo local ou relativo de f se existir uma bolsa aberta B de centro (a,b), tal que

$$f(x,y) \leq f(a,b), \quad \forall (x,y) \in B \cap D$$

Definição 4: Dizemos que $(a,b) \in D$ é ponto de mínimo local ou relativo de f se existir uma bola aberta B de centro (a,b) tal que

$$f(x,y) \geqslant f(a,b), \quad \forall (x,y) \in B \cap D.$$

Os pontos de máximo e de mínimo de f são denominados extremantes de f.

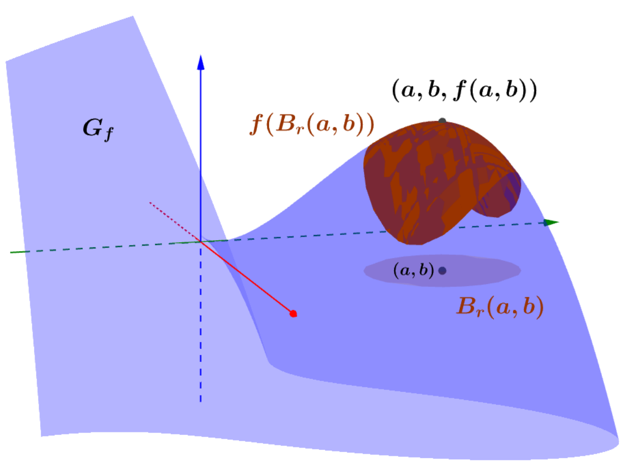

Figure 3: Máximo local

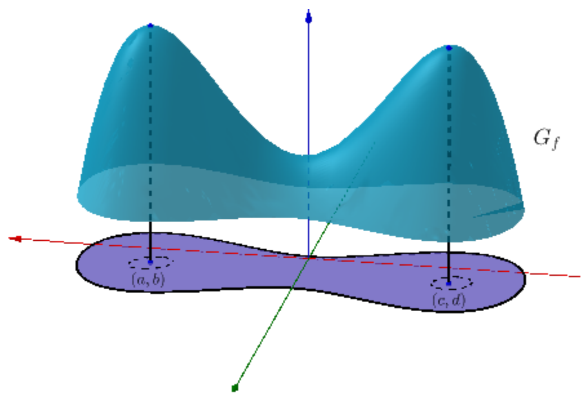

Figure 4: Dois máximos locais e globais com mesmo valor

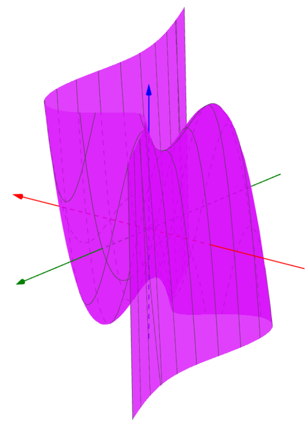

Figure 5: Extremantes locais que não são globais

Teorema: Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em $(a, b) \in D$. Se (a, b) é um extremante local de f, então $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$; ou equivalentemente, $\nabla f(a, b) = (0, 0)$.

Interpretação geométrica: Sendo f diferenciável em (a, b). O plano tangente ao gráfico de f em $(a, b, f(a, b))$, onde (a, b) é um extremante local de f, é um plano horizontal.

Com efeito, o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a, b, f(a, b))$ é:

$$z - f(a, b) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)}_{=0}(x - a) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}_{=0}(y - b)$$

donde, $z = f(a, b)$ que é um plano horizontal.

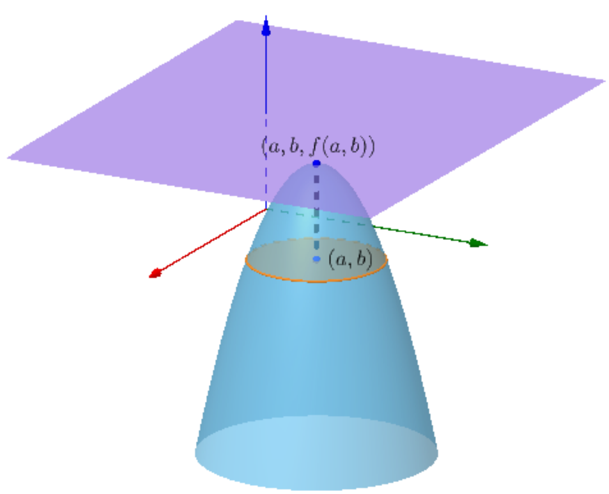

Figure 6: Plano tangente em um extremante local

Definição 5: Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, D aberto. Um ponto $(a, b) \in D$ é dito de ponto critico de f se $\nabla f(a, b) = (0, 0)$ ou se $\nabla f(a, b)$.

Observações:

(I) Se (a, b) é um extremante local, então (a, b) é ponto crítico.

(II) Se (a, b) é um ponto crítico, então (a, b) é candidato a ser extremante local.

(III) A recíproca do Teorema é falsa.

De fato, considere a função $f(x, y) = y^2 - x^2$, que é diferenciável. Os pontos críticos de f são encontrados resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

Portanto, $(x, y) = (0, 0)$ é o único ponto crítico da função.

Observe que o gráfico de f tem equação $G_f : z = y^2 - x^2$, que é um paraboloide hiperbólico.

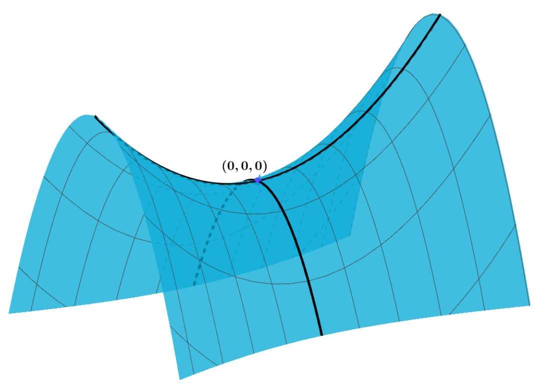

Figure 7: Ponto de sela

Pelo gráfico de f, vemos que o ponto crítico $(0, 0)$ não é um extremante local. Com efeito, a curva interseção com o plano $x = 0$, isto é, $z = y^2$, possui um mínimo em $(0, 0)$. Já a curva interseção com o plano $y = 0$, isto é, $z = -x^2$, possui um máximo em $(0, 0)$. Neste caso, $(0, 0)$ é dito de ponto de sela.

(IV) Seja $p(x, y) = Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F$, onde A, B, C, D, E, F são constantes. Se $A \neq 0$ e $B \neq 0$, então o gráfico de p, G_p, é um paraboloide elíptico ou um paraboloide hiperbólico.

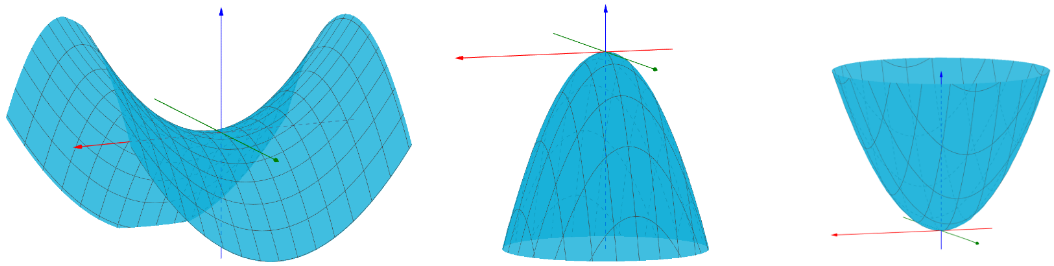

Figure 8: Sela, máximo e mínimo

Se $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ é um extremante local de f, então G_p é um paraboloide elíptico. Logo (a,b) é um extremante absoluto de f.

Se $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ não for um extremante local de f, então G_p é um paraboloide hiperbólico. Logo (a,b) é um ponto de sela.

(V) Se $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, D aberto, for uma função de classe C^2 e (a,b) um ponto crítico, então

$$P_2(x,y) = f(a,b)+\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y-b)^2 =$$

$$= Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F,$$

onde A, B, C, D, E, F são constantes, é o polinômio de Taylor de ordem 2 de f centrado no ponto (a,b).

(VI) Se $\nabla f(a,b) = (0,0)$ e o ponto crítico (a,b) não for um extremante local (máximo ou mínimo), então (a,b) é dito de ponto de sela.

Para analisar a natureza de um ponto crítico (a,b) de f tal que $\nabla f(0,0) = (0,0)$ usaremos o teste da derivada segunda.

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, D aberto, cujas parciais de segunda ordem existem em D. A matriz

$$h_f(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix}$$

é dita matriz hessiana de f no ponto $(x,y) \in D$.

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, D aberto, de classe C^2 em D. A função

$$H_f(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2$$

é dita hessiano de f no ponto $(x, y) \in D$.

Observe que o hessiano $H_f(x, y)$ é o determinante da matriz hessiana $h_f(x, y)$, $\forall (x, y) \in D$.

Por abuso de notação escreveremos $H(x, y)$ sempre que não houver dúvidas sobre a função f.

Observe que

$$P_2(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{2}[x - a, y - b]\ h_f(a, b) \begin{bmatrix} x - a \\ y - b \end{bmatrix},$$

sendo $P_2(x, y)$ o polinômio de Taylor de ordem 2 centrado em (a, b) da função f.

Assim, de acordo com a observação (IV) e (V), próximo do ponto (a, b) a função $f(x, y)$ pode ser enxergada como um paraboloide elíptico ou um paraboloide hiperbólico, dependendo da forma quadrática $[x - a, y - b]\ h_f(a, b) \begin{bmatrix} x - a \\ y - b \end{bmatrix}$ for não definida, definida negativa ou definida positiva (de esquerda a direita na figura da Observação (IV)).

O Teorema a seguir relaciona o argumento anterior com os extremantes da função. Ver observação (IV).

Teorema (teste da derivada segunda): Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, D aberto, de classe C^2 em D. Seja $(a, b) \in D$, um ponto crítico de f, isto é, $\nabla f(a, b) = (0, 0)$. Então,

(i) $H(a, b) > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0 \Rightarrow (a, b)$ é ponto de mínimo local de f

(ii) $H(a, b) > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0 \Rightarrow (a, b)$ é ponto de máximo local de f

(iii) $H(a, b) < 0 \Rightarrow (a, b)$ é ponto de sela de f

(iv) $H(a, b) = 0 \Rightarrow$ nada se conclui.

Exemplos

1. Determine os pontos críticos de $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$.

   Solução

   Como f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$, então os pontos críticos de f são encontrados resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

Portanto, os pontos críticos são $(1,1), (-1,1), (1,-1), (-1,-1)$.

2. Determine os pontos críticos de $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Solução

Temos $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\forall (x,y) \neq (0,0)$.

Observe que $D_f = \mathbb{R}^2$, portanto falta estudar a origem. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$

O limite não existe, logo $\nexists \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e também não existe $\nabla f(0,0)$. Então, $(0,0)$ é o único ponto crítico da função f.

Como $f(0,0) = 0 \leq \sqrt{x^2+y^2} = f(x,y)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, o ponto crítico $(0,0)$ é um ponto de mínimo absoluto de f.

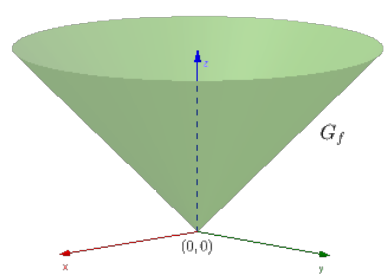

Figure 9: Mínimo de uma função não diferenciável

3. Classifique os pontos críticos da função $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$.

Solução

Vimos anteriormente que $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ e $(-1,-1)$ são os pontos críticos de f. Temos, $f_x = 3x^2 - 3$, $f_y = 3y^2 - 3$, $f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = 6y$.

Logo,

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} = 36xy.$$

Aplicando o teste da segunda derivada:

$$H(1,1) = 36 > 0, f_{xx}(1,1) = 6 > 0 \Rightarrow (1,1) \text{ é ponto de mínimo local}$$

$H(-1,1) = -36 < 0 \Rightarrow (-1,1)$ é ponto de sela.

$H(1,-1) = -36 < 0 \Rightarrow (1,-1)$ é ponto de sela

$H(-1,-1) = 36 > 0$ e $f_{xx}(-1,-1) = -6 < 0 \Rightarrow (-1,1)$ é ponto de máximo local.

4. Seja $f(x,y) = x^4 + y^4$. Determine os pontos críticos de f e classifique-os, se possível, pelo teste da derivada segunda.

   Solução

   Temos $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y^3$.

   Logo,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} (x,y) = (0,0) \\ \text{é o único ponto crítico da função} \end{array}$$

   Temos $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, logo $H(x,y) = \begin{vmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{vmatrix} = 144x^2y^2$, donde $H(0,0) = 0$. Portanto, nada se conclui pelo teste da derivada segunda.

   Contudo,

$$f(0,0) = 0 \leq x^4 + y^4 = f(x,y)$$

   para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Logo, $(0,0)$ é ponto de mínimo global de f.

5. Analise a natureza dos pontos críticos de $f(x,y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$.

   Solução

   Temos $f_x = 8x^3 - 2x, f_y = 2y - 2$. Para encontrar os pontos críticos de f, devemos resolver o sistema de equações:

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x^3 - 2x = 0 \\ 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x(4x^2 - 1) = 0 \\ 2(y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \quad \text{ou} \quad 4x^2 - 1 = 0 \\ \qquad y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{2} \\ \qquad y = 1 \end{cases}$$

   Logo, os ponto crítico de f são $(0,1)$, $(\dfrac{1}{1}, 0)$, $(-\dfrac{1}{2}, 0)$.

   Vamos aplicar o teste da derivada segunda, temos

$$f_{xx} = 24x^2 - 2, f_{xy} = 0, f_{yy} = 2.$$

   O hessiano de f é dado por

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 2\left(12x^2 - 1\right) & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4\left(12x^2 - 1\right).$$

$H(0,1) = -4 < 0 \Rightarrow (0,1)$ é ponto de sela

$H(\frac{1}{2},0) = 4\left(12 \cdot \frac{1}{4} - 1\right) > 0$ e $f_{xx}\left(\frac{1}{2},0\right) = 2\left(12 \cdot \frac{1}{4} - 1\right) > 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2},0\right)$ é ponto mínimo local.

$H(-\frac{1}{2},0) > 0$ e $f_{xx}\left(-\frac{1}{2},0\right) > 0 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2},0\right)$ é ponto de mínimo local.

6. Determine o ponto do plano $x + 2y - z = 4$ que se encontra mais próximo da origem.

Solução

A distância de (x,y,z) a $(0,0,0)$ é dada por $d(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Como (x,y,z) está no plano, então $x+2y-z=4$ ou $z = x+2y-4$. Assim, temos

$$D(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+(x+2y-4)^2}.$$

Observamos que minimizar $D(x,y)$ é equivalente a minimizar $D^2(x,y) = f(x,y)$. Então, consideremos

$$f(x,y) = x^2+y^2+(x+2y-4)^2 \geqslant 0, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

O fato de $f(x,y) \geqslant 0$ não significa que 0 seja o valor mínimo global. Pode ser um outro valor $M > 0$. O mesmo acontece com a função $z = x^2+y^2+8$. Confira!

Aplicaremos o teste da segunda derivada para encontrar um ponto de mínimo local e depois argumentaremos que o mesmo é um ponto de mínimo global.

Temos,

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x + 2(x+2y-4) = 4x+4y-8 \\ f_y(x,y) &= 2y + 2\cdot 2(x+2y-4) = 4x+10y-16. \end{aligned}$$

Os ponto crítico são encontrados resolvendo

$$\begin{cases} 4x+4y-8=0 \\ 4x+10y-16=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+4y=8 \\ 4x+10y=16 \end{cases} \Rightarrow 6y = 8 \Rightarrow y = \frac{4}{3}, x = \frac{2}{3}.$$

Então $(x,y) = \left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$ é o único ponto crítico de f.

Temos $f_{xx} = 4$, $f_{xy} = 4$,$f_{yy} = 10$. Logo, $H(x,y) = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 40 - 16 > 0$. Como $f_{xx} = 4 > 0$, então, pelo teste da derivada segunda, temos que $\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$ é ponto de mínimo local de f.

Como f é um polinômio de grau 2, decorre da Observação (IV) que $\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$ é ponto de mínimo global. Portanto, o ponto mais próximo da origem é $\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$ e $M = \frac{2\sqrt{6}}{3} > 0$ é a distância mínima.

7. Deseja-se construir uma caixa retangular sem tampa, com volume $4dm^3$. O material a ser utilizado nas laterais custa o dobro do que será utilizado no fundo. Determine as dimensões da caixa que minimiza o custo do material.

Solução

Sejam $x, y, z > 0$ as dimensões da caixa. Logo, $xyz = 4$, donde $z = \dfrac{4}{xy}$, $x, y > 0$.

O custo total é dado por $2(xz + yz) + xy$, onde $z = \dfrac{4}{xy}$.

Portanto, queremos minimizar $f(x,y) = 2\left(\dfrac{4}{y} + \dfrac{4}{x}\right) + xy$, $x > 0$, $y > 0$.

Temos, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{8}{x^2} + y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{8}{y^2} + x$. Vamos resolver

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{8}{x^2} + y = 0 \\ \\ -\dfrac{8}{x^2} + x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{8}{x^2} (*) \\ \\ x = \dfrac{8}{y^2} (*) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 y = xy^2 \overset{x,y>0}{\Rightarrow} x = y$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} x^3 = y^3 = 8 \Rightarrow (x,y) = (2,2)$$

Temos $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{16}{x^3}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{16}{y^3}$.

Então, $H(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{16}{x^3} & 1 \\ 1 & \dfrac{16}{y^3} \end{vmatrix} = \dfrac{16^2}{x^3 y^3} - 1$

Como $H(2,2) = \dfrac{16^2}{64} - 1 > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x}(2,2) = \dfrac{16}{8} > 0$, decorre do teste da segunda derivada que $(2,2)$ é ponto de mínimo local. Pela natureza do problema, vemos que as dimensões que minimiza o custo são $x = 2$, $y = 2$ e $z = \dfrac{4}{2 \cdot 2} = 1$. E o custo mínimo é de $f(2,2) = 8$ unidades de moeda.

Exercícios

1. Analise a natureza dos pontos críticos das seguintes funções.

   (a) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

   (b) $f(x,y) = y - x^2 - y^2 + x^2 y$

   (c) $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{xy}$

   (d) $f(x,y) = (x-3)\ln(xy)$

2. Determine as dimensões de uma caixa retangular sem tampa, com um volume de $32\ dm^3$ e que requer uma quantidade mínima de material para a sua construção.

3. Determine a distância mais curta entre o ponto $(1, 0, -2)$ e o plano $x+2y+z=4$.

Respostas

1. (a) $(2, 1)$ ponto de mínimo local; $(-2, -1)$ ponto de máximo local; $(1, 2)$ e $(-1, 2)$ pontos de sela .
   (b) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ponto de máximo local; $(1, 1)$ e $(-1, 1)$ pontos de sela .
   (c) $(1, 1)$ e $(-1, -1)$ pontos de mínimo local.
   (d) (3, $\frac{1}{3}$) ponto de sela.
2. base quadrada de lado $4\ dm$ e altura $2\ dm$
3. $5\sqrt{6}/6$.