Funções escalares de várias variáveis

Derivadas Parciais

Objetivos:

- definição e interpretação geométrica das derivadas parciais;
- cálculo das derivadas parciais;
- derivada parcial como taxa de variação;

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função definida no conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^2$. Seja $(a, b) \in D$.

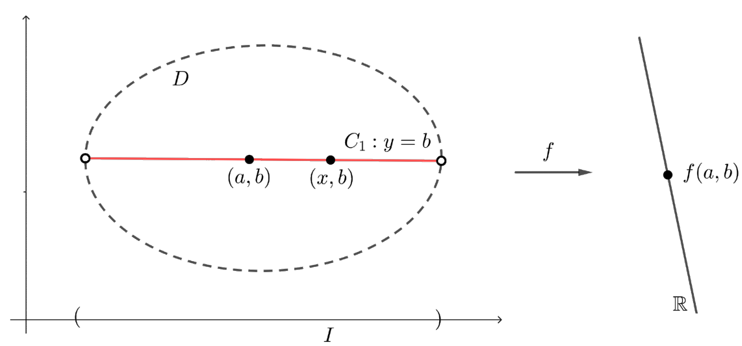

Figure 1: Segmento interseção $C_1 : y = b, x \in I$

Fixando $y = b$, obtemos o segmento interseção $C_1 : y = b, x \in I$. A função $g(x) = f(x, b), x \in I$, é bem definida em C_1. A derivada de g em $x = a$ seria dada por

$$g'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

ou equivalentemente,

$$g'(a) = \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}$$

se existir o limite. Essa derivada é dita derivada parcial de f em relação a x no ponto (a, b) é indicada por:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \text{ ou } f_x(a,b) \text{ ou } \frac{\partial z}{\partial x}(a,b) \text{ ou } z_x(a,b).$$

Então, definiremos a derivada parcial de f em relação a x no ponto (a,b) como sendo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = f_x(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

ou equivalentemente,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = f_x(a,b) = \lim_{x\to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x-a},$$

se o limite existir. Caso contrário diremos que a derivada parcial não existe.

Analogamente, definimos a derivada parcial de f em relação a y, no ponto (a,b), por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = f_y(a,b) = \frac{\partial z}{\partial y}(a,b) = z_y(a,b) = \lim_{k\to 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k}$$

ou equivalentemente,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = f_y(a,b) = \frac{\partial z}{\partial y}(a,b) = z_y(a,b) = \lim_{y\to b} \frac{f(a,y) - f(a,b)}{y-b},$$

se o limite existir. Caso contrário diremos que a derivada parcial não existe.

Interpretação geométrica de $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$: Geometricamente, estamos fazendo a restrição de f sobre a reta $y=b$ e olhando para a curva correspondente $f(C_1)$, sobre o gráfico de f. Dessa maneira, o número $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = g'(a)$ é o coeficiente angular da reta tangente à curva $f(C_1)$ no ponto $(a,b,f(a,b))$. Isto é $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \tan\alpha$.

Interpretação geométrica de $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$: Geometricamente, temos que $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ é o coeficiente angular da reta tangente à curva $f(C_2)$ obtida como a interseção do G_f com o plano $x=a$, no ponto $(a,b,f(a,b))$. Isto é, $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \tan\beta$.

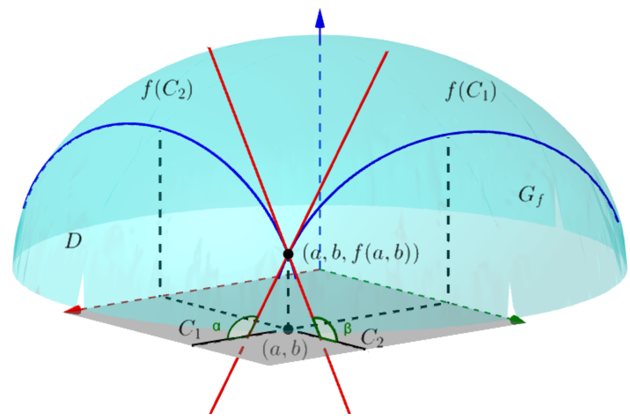

Figure 2: Segmento interseção $C_2 : x = a, y \in J$ e $C_1 : y = b, x \in I$

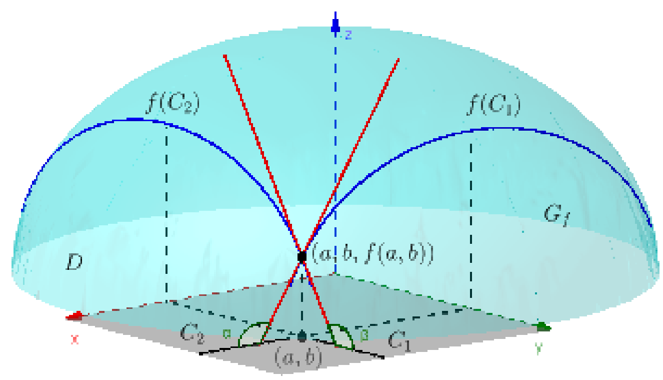

Figure 3: Interpretação geométrica das derivadas parciais

Derivadas parciais como taxas de variação: Como $f_x(a, b)$ é a inclinação da reta tangente à curva $f(C_1)$ no ponto $(a, b, f(a, b))$, também pode ser interpretada como a taxa de variação da função f em relação a x no ponto (a, b) (ao longo da curva C_1).

Com efeito, $f_x(a, b)$ é a taxa de variação instantânea da função $g(x) = f(x, b)$, $x \in I$, no ponto $x = a$. Como tal, ela pode ser aproximada por taxas de variação médias:

$$f_x(a, b) \approx \frac{1}{2}\left[\frac{f(a + h_1, b) - f(a, b)}{h_1} + \frac{f(a + h_2, b) - f(a, b)}{h_2}\right],$$

com $a + h_1 < a < a + h_2$.

Analogamente, $f_y(a, b)$ é a taxa de variação da função f em relação a y no ponto (a, b) (ao longo da curva C_2). Como tal, ela pode ser aproximada por taxas de variação médias:

$$f_y(a, b) \approx \frac{1}{2}\left[\frac{f(a, b + k_1) - f(a, b)}{k_1} + \frac{f(a, b + k_2) - f(a, b)}{k_2}\right],$$

com $b+k_1<b<b+k_2$.

Regra prática para calcular as parciais: Para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, faz-se y constante e deriva-se f em relação a x e para calcular $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, faz-se x constante e deriva-se f em relação a y.

Por exemplo, se $f(x,y)=x^3y^2$, então $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2y^2$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2yx^3$.

Derivadas parciais de funções de três variáveis: Sejam $f:D\subset\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$, D aberto, e $(a,b,c)\in D$. Definimos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x,b,c)-f(a,b,c)}{\Delta x}, \text{ se o limite existir.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(a,b+\Delta y,c)-f(a,b,c)}{\Delta y}, \text{ se o limite existir.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(a,b,c+\Delta z)-f(a,b,c)}{\Delta z}, \text{ se o limite existir.}$$

Na hora de calcular $\frac{\partial f}{\partial z}$, faz-se x e y constantes e deriva-se f em relação a z. Analogamente para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exemplos

1. Seja $f(x,y)=x$. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pela definição.

   Solução

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

   $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{x-x}{k}=\lim_{k\to 0}0=0$$

2. Seja $f(x,y)=y$. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pela definição.

   Solução

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{y-y}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

   $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{y+k-y}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{k}{k}=\lim_{k\to 0}1=1$$

3. Seja $f(x,y)=2xy-3y$. Calcule

   (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

(c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)$

(d) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-1,1)$.

Solução

(a) Mantendo y constante e derivando em relação a x, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(2xy-3y)=\frac{\partial}{\partial x}(2xy)-\frac{\partial}{\partial x}(3y)=2y-0=2y$$

(b) Mantendo x constante e derivando em relação a y, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(2xy-3y)=\frac{\partial}{\partial y}(2xy)-\frac{\partial}{\partial y}(3y)=2x-3$$

(c) Como $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2y$, para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, então $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)=2$.

(d) Como $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2x-3$, para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, então $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-1,1)=-5$.

4. Calcule as derivadas parciais de $z=x^2\ln\left(x^2+y^2\right)$.

Solução

Mantendo y constante e usando regras de derivação para as funções de uma variável, como $(\ln u)'=\frac{u'}{u}$, temos

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\right)\ln\left(x^2+y^2\right)+x^2\frac{\partial}{\partial x}\ln\left(x^2+y^2\right)=2x\ln\left(x^2+y^2\right)+x^2\cdot\frac{\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}=$$

$$=2x\ln\left(x^2+y^2\right)+x^2\cdot\frac{2x}{x^2+y^2}=2x\ln\left(x^2+y^2\right)+\frac{2x^3}{x^2+y^2}$$

Analogamente, mantendo x constante, temos

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\frac{\partial}{\partial y}\ln\left(x^2+y^2\right)=x^2\cdot\frac{\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}=x^2\cdot\frac{2y}{x^2+y^2}=\frac{2x^2y}{x^2+y^2}$$

5. Calcule a equação da reta tangente à curva de interseção do paraboloide $z = 2x^2 + 3y^2$ e o plano $x = 1$ no ponto $(1, 2, 14)$.

   Solução Observe que o ponto $(1, 2, 14)$ pertence à interseção de G_f e o plano $x = 1$. Portanto, o coeficiente angular da reta tangente será $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 6y|_{(1,2)} = 6 \cdot 2 = 12$. Logo, a equação da reta tangente é:

$$\begin{cases} z = 14 + 12(y - 2) \\ x = 1 \end{cases}$$

6. Calcule a equação da reta tangente à curva de interseção da superfície $x^2+y^2+z^2 = 5$ e o plano $y = 0$ no ponto $(2, 0, -1)$.

   Solução Como a terceira coordenada do ponto $(2, 0, -1)$ é negativa, consideraremos a função $f(x, y) = -\sqrt{5 - x^2 - y^2}$. O ponto $(2, 0, -1)$ pertence à interseção de G_f e o plano $y = 0$, portanto, o coeficiente angular da reta tangente será $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2, 0) = -\dfrac{-2x}{2\sqrt{5 - x^2 - y^2}}\Bigg|_{(2,0)} = 2$. Logo, a equação da reta tangente é:

$$\begin{cases} z = -1 + 2(x - 2) \\ y = 0 \end{cases}$$

7. De acordo com a lei dos gases ideais, a pressão está relacionada com a temperatura e o volume de um gás. Suponha que o volume V seja medido em litros (l) e a temperatura T seja medida em kelvins (K). Use a tabela a seguir para:

Temperatura K°

Volume L	10,00	30,00	50,00	70,00
20,00	10,00	30,00	50,00	70,00
40,00	5,00	15,00	25,00	35,00
60,00	3,33	10,00	16,67	23,33
80,00	2,50	7,50	12,50	17,50

Figure 4: Tabela lei dos gases ideais

   (a) obter uma estimativa da taxa de variação instantânea da pressão em relação à temperatura se a temperatura for 50 K e o volume permanecer constante em 60 l;

   (b) obter uma estimativa da taxa de variação instantânea da pressão em relação ao volume se a temperatura permanecer constante a 30 K e o volume for 40 l;

   (c) A pressão aumenta ou diminui em relação à temperatura? E em relação ao volume?

Solução

(a) Dado que $\dfrac{\partial P}{\partial T}(T_0, V_0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{P(T_0+h, V_0)}{h}$, a taxa de variação pode ser estimada considerando a média das taxas de variação média com, por exemplo, $h_1 = 20$ e $h_2 = -20$. Com efeito,

$$\frac{\partial P}{\partial T}(50,60) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{P(50+20,60)-P(50,60)}{20} + \frac{P(50-20,60)-P(50,60)}{-20}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{23.33-16.67}{20} + \frac{10-16.67)}{-20}\right) = \frac{1}{2}(0.33+0.33) = 0.33$$

(b) Dado que $\dfrac{\partial P}{\partial V}(T_0, V_0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{P(T_0, V_0+h)}{h}$, a taxa de variação considerada pode ser estimada considerando a média das taxas de variação média com, por exemplo, $h_1 = 20$ e $h_2 = -20$. Com efeito,

$$\frac{\partial P}{\partial V}(30,40) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{P(30,40+20)-P(30,40)}{20} + \frac{P(30,40-20)-P(30,40)}{-20}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{10-15}{20} + \frac{30-15)}{-20}\right) = \frac{1}{2}(-0.25+(-0.75)) = -0.50$$

(c) Como $\dfrac{\partial P}{\partial T}(50,60) > 0$, a pressão aumenta em relação à temperatura quando o volume é constante $V = 60$ e a temperatura pega o valor de 50K. Já em relação ao volume quando a temperatura é constante a $T = 30$ e o volume pega o valor de 40L a pressão diminui, pois $\dfrac{\partial P}{\partial V}(30,40) < 0$.

Observamos que, segundo os dados da tabela, quando afixamos o volume e percorremos os valores da temperatura a pressão sempre aumenta. Porem, se fixamos a temperatura e percorremos os valores do volume, a pressão diminui.

8. Seja $f(x,y) = \dfrac{y^3}{x^2+y^2}$, se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(x,y) = 0$, se $(x,y) = (0,0)$. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

Solução

Nos pontos $(x,y) \neq (0,0)$, aplicamos regras de derivação. Então,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-y^3\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{-2xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3y^2\left(x^2+y^2\right) - y^3\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{3x^2y^2+3y^4-2y^4}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{3x^2y^2+y^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Em $(x,y)=(0,0)$, usamos a definição. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{k^3}{k^2}-0}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{k}{k}=\lim_{k\to 0}1=1.$$

Portanto, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\frac{-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\frac{3x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

9. Seja $f(x,y,z)=\displaystyle\int_0^{x+y^2+z^4} g(t)dt$, onde $g(3)=4$. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1,1)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1,1)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)$.

Solução

Aqui, usaremos a seguinte aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo: " Se $F(x)=\displaystyle\int_a^{\alpha(x)} f(t)dt$, então $F'(x)=f(\alpha(x))\cdot\alpha'(x)$".

Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=g\left(x+y^2+z^4\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(x+y^2+z^4\right)=g\left(x+y^2+z^4\right)\cdot 1=g\left(x+y^2+z^4\right)$$

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1)=g(1+1+1)=g(3)=4$$

Temos,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=g\left(x+y^2+z^4\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(x+y^2+z^4\right)=g\left(x+y^2+z^4\right).2y,$$

donde $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1,1)=g(3)\cdot 2=8$.

Temos,

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=g\left(x+y^2+z^4\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(x+y^2+z^4\right)=g\left(x+y^2+z^4\right)\cdot 4z^3,$$

donde $\dfrac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)=g(3)\cdot 4=16$

10. Seja $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e seja $f(x,y) = (x^2+y^2)\,\phi\left(\frac{x}{y}\right)$. Mostre que $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2f$.

Solução

Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\phi\left(\frac{x}{y}\right) + \left(x^2+y^2\right)\phi'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) = 2x\phi\left(\frac{x}{y}\right) + \left(x^2+y^2\right)\phi'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y},$$

donde $x\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x^2\phi\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y}\left(x^2+y^2\right)\phi'\left(\frac{x}{y}\right)$.

Temos,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= 2y\phi\left(\frac{x}{y}\right) + \left(x^2+y^2\right)\phi'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right)\\ &= 2y\phi\left(\frac{x}{y}\right) + \left(x^2+y^2\right)\phi'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = 2y\phi\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y^2}\left(x^2+y^2\right)\phi'\left(\frac{x}{y}\right),\end{aligned}$$

donde, $y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y^2\phi\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y}\left(x^2+y^2\right)\phi'\left(\frac{x}{y}\right)$

Somando as duas expressões das parciais, temos

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2\left(x^2+y^2\right)\phi\left(\frac{x}{y}\right) = 2f$$

como queríamos mostrar.

11. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável e seja g dada por $g(x,y,z) = f(r)$, onde $r = \|(x,y,z)\|$. Verifique

$$\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} + z\frac{\partial g}{\partial z} = rf'(r).$$

Solução

Temos

$$g(x,y,z) = f(r), r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

.

Então,

$$\frac{\partial g}{\partial x} = f'(r)\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = f'(r)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = f'(r)\frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = f'(r)\cdot\frac{\partial r}{\partial y} = f'(r)\cdot\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = f'(r)\frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = f'(r)\cdot\frac{\partial r}{\partial z} = f'(r)\cdot\frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = f'(r)\frac{z}{r}$$

$$x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} + z\frac{\partial g}{\partial z} = f'(r)\frac{x^2}{r} + f'(r)\frac{y^2}{r} + f'(r)\frac{z^2}{r}$$

$$= f'(r)\frac{x^2+y^2+z^2}{r} = f'(r)\frac{r^2}{r} = rf'(r)$$

Como queríamos verificar.

Exercícios

1. Determine as derivadas parciais da função:
   (a) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^2+3}$
   (b) $f(x,y) = \text{arctan}\, \frac{y}{x}$
   (c) $f(x,y) = \int_{x^2}^{y^2} e^{-t^2}dt$
   (d) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)$
   (e) $\omega = xe^{x-y-z}$

2. A altura h de ondas em mar aberto depende da velocidade do vento v e do tempo t durante o qual o vento se manteve naquela intensidade. Os valores da função $h = f(v,t)$ são apresentados na seguinte tabela.

Duração (horas)

Velocidade do vento (km/h)

v \ t	5	10	15	20	30	40	50
20	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
30	1,2	1,3	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6
40	1,5	2,2	2,4	2,5	2,7	2,8	2,8
60	2,8	4,0	4,9	5,2	5,5	5,8	5,9
80	4,3	6,4	7,7	8,6	9,5	10,1	10,2
100	5,8	8,9	11,0	12,2	13,8	14,7	15,3
120	7,4	11,3	14,4	16,6	19,0	20,5	21,1

   (a) segundo a tabela, a qual taxa (estimada) varia a altura das ondas em relação à velocidade do vento quando dita velocidade é de $30\ km/h$ e sabendo que o vento se mantém na mesma intensidade por um tempo de 20 horas? Justifique a resposta.
   (b) segundo a tabela, a qual taxa (estimada) varia a altura das ondas em relação ao tempo no qual o vento se mantém na mesma intensidade se dito tempo é de 20 horas e sabendo que a velocidade do vento permanece constante a $30\ km/h$? Justifique a resposta.

(c) nas condições do item (a) e (b), a altura das ondas aumenta o diminui em relação ao tempo? E em relação à velocidade do vento? Justifique a resposta.

3. Use as derivadas parciais para encontrar, se possível, a equação da reta tangente à curva interseção do plano $x = \pi$ com a superfície $z = \dfrac{2y}{y + \cos x}$ nos pontos $P(\pi, 2, 4)$, $Q(2\pi, 1, 1)$ e $R(\pi, 0, 1)$.

4. Seja $z = f\left(x^2 - y^2\right)$, onde $f(u)$ é uma função diferenciável de uma variável. Verifique que
$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

5. Seja $f(x, y) = x^3y^2 - 6xy + \phi(y)$. Determine uma função ϕ, de modo que $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y - 6x + \dfrac{y}{y^2 + 1}$.

6. Seja $f(x, y) = \dfrac{5xy^2}{x^2 + y^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(x, y) = 0$ se $(x, y) = (0, 0)$. Calcule $f(1, 2) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 2) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 2) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$.

7. Seja $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$. Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

8. Seja $f(x, y) = \dfrac{x^4}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0)$, $f(x, y) = 0$, $(x, y) = (0, 0)$. Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Respostas

1. (a) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^2+3)^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{\sqrt[3]{(x^3+y^2+3)^2}}$
   (b) $f_x = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $f_y = \frac{x}{x^2+y^2}$
   (c) $\frac{\partial f}{\partial x} = -2xe^{-x^4}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{-y^4}$
   (d) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}$
   (e) $\frac{\partial \omega}{\partial x} = (1 + x)e^{x-y-z}$, $\frac{\partial \omega}{\partial y} = -xe^{x-y-z}$, $\frac{\partial \omega}{\partial z} = -xe^{x-y-z}$

2. (a) $0,095\ km/h$
   (b) $0\ km/h^2$
   (c) Aumenta em relação ao tempo e permanece constante em relação a velocidade do vento.

3. A reta tangente no ponto P é $\begin{cases} z = 8 - 2y \\ x = \pi \end{cases}$ e não existe nos pontos Q e R.

4. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$ e $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$.

5. $\phi(y) = \frac{1}{2} \ln (1 + y^2)$

6. $\frac{12}{5}$

7. $0; -1$

8. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^5 + 4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-2x^4 y}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$