



Funções escalares de várias variáveis

Derivadas Parciais de Ordem Superior

Objetivos:

- cálculo de derivadas parciais de ordem superior;
- teorema de Schwarz;
- polinômio de Taylor de ordem 2; aproximação não linear.

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, D aberto, diferenciável. Então existem as funções derivadas parciais de primeira ordem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Suponhamos que as funções $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ sejam diferenciáveis em D . Então, temos as funções derivadas parciais de segunda ordem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Supondo as funções $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ diferenciáveis em D , temos as funções derivadas parciais de 3 ordem:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

E assim por diante.

Observação: Caso as derivadas parciais de 2ª ordem existam, essa seria sua definição:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a+h, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)}{h}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)}{k}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b+k) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}{k}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a+h, b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}{h}$$

Definição: Dizemos que f é de classe C^k em D se f tem derivadas parciais de ordem k contínuas em D .

Teorema de Schwarz Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, D aberto. Se f for de classe C^2 em D , então as derivadas parciais mistas são iguais em D :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x, y), \quad \forall (x, y) \in D, \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

Em particular, se f for uma função de duas variáveis, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$.

Polinômio de Taylor de Ordem 1

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 no aberto $D \subset \mathbb{R}^2$. Seja $(a, b) \in D$. O polinômio:

$$P_1(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

é dito polinômio de Taylor de ordem 1 de f perto de (a, b) .

Sabemos que $\Delta f \simeq df$ quando $(x, y) \simeq (a, b)$. Logo,

$$f(x, y) - f(a, b) \simeq \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

Se $(x, y) \simeq (a, b)$

Donde,

$$f(x, y) \simeq f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

se $(x, y) \simeq (a, b)$.

Portanto, $f(x, y) \simeq P_1(x, y)$, se $(x, y) \simeq (a, b)$.

Polinômio de Taylor de Ordem 2

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 no aberto $D \subset \mathbb{R}^2$ e $(a, b) \in D$. O polinômio

$$P_2(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)(x - a)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)(x - a)(y - b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)(y - b)^2 \right]$$

é dito polinômio de Taylor de ordem 2 de f perto de (a, b) .

Mostra-se que $f(x, y) \simeq P_2(x, y)$ se $(x, y) \simeq (a, b)$.

Observação

- (I) $P_1(x, y) = L(x, y)$, a função linearizada de f perto de (a, b) .
- (II) $P_2(x, y)$ também serve para aproximar os valores da função f em pontos próximos a (a, b) . O erro de aproximação de $P_2(x, y)$ é menor do que o erro de aproximação pela linearizada.
- (III) É aconselhável aproximar por $P_2(x, y)$ quando $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$. Exemplo: $f(x, y) = \cos(x + y)$ em $(0, 0)$.

Exemplos

1. Calcule todas as derivadas parciais de 2ª ordem de $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$.

Solução

Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}$$

Logo,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2(1 + x^2 + y^2) - 2y \cdot 2y}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{2 + 2x^2 + 2y^2 - 4x^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{2 - 2x^2 + 2y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-2x \cdot 2y}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{-4xy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2(1 + x^2 + y^2) - 2y \cdot 2y}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{2 + 2x^2 + 2y^2 - 4y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{2 + 2x^2 - 2y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-2y \cdot 2x}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{-4xy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

2. Seja $u = f(x - at) + g(x + at)$, onde f e g são duas funções quaisquer de uma variável real e deriváveis até a 2ª ordem. Verifique que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Esta equação é conhecida como a equação de onda.

Solução

Derivando u em relação a x , temos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x - at) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(x - at)}_1 + g'(x + at) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(x + at)}_1$$

donde $\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x - at) + g'(x + at)$.

Logo, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x - at) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(x - at)}_1 + g''(x + at) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(x + at)}_1$

donde, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x - at) + g''(x + at)$ (1)

Derivando u em relação a t , temos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f'(x - at) \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(x - at)}_{-a} + g'(x + at) \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(x + at)}_a$$

donde $\frac{\partial u}{\partial t} = -af'(x - at) + ag'(x + at)$.

Logo, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -af''(x - at) \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(x - at)}_{-a} + ag''(x + at) \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(x + at)}_a$, donde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 f''(x - at) + a^2 g''(x + at) \frac{\partial}{\partial t}(x + at), \text{ ou}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 (f''(x - at) + g''(x + at))$$
 (2)

De (1) e (2), vemos que $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, como queríamos verificar.

3. Seja $w(x, t) = (a \cos(cx) + b \sin(cx))e^{-kc^2t}$, onde a , b e c são constantes. Verifique que

$$\frac{\partial w}{\partial t} = k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Esta equação é conhecida como a equação do calor.

Solução

Derivando w em relação a t , temos:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -kc^2 e^{-kc^2 t} (a \cos(cx) + b \operatorname{sen}(cx))$$

Derivando w em relação a x , temos:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = e^{kc^2 t} (-ac \operatorname{sen}(cx) + bc \cos(cx))$$

Derivando de novo em relação a x , temos:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = e^{-k^2 t} (-ac^2 \cos(cx) - bc^2 \operatorname{sen}(cx)) = -c^2 e^{-kc^2 t} (a \cos(cx) + b \operatorname{sen}(cx))$$

Portanto,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = k \left[-c^2 e^{-kc^2 t} (a \cos(cx) + b \operatorname{sen}(cx)) \right] = k \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$$

4. Suponha que $f(x, y)$ seja de classe C^2 em \mathbb{R}^2 . Seja $g(t) = f(3t, 2t + 1)$. Expresse $g''(t)$ em termos das derivadas parciais de f .

Solução

Temos $g(t) = f(x, y)$, onde $x = 3t, y = 2t + 1$. Pela regra da cadeia, temos

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{dy}{dt} = 3 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y),$$

ou seja,

$$g'(t) = 3 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \text{ onde } \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \text{ são funções compostas.}$$

Então, novamente, pela regra da cadeia, temos:

$$\begin{aligned} g''(t) &= 3 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=3} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{=2} \right] \\ &\quad + 2 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=3} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{=2} \right] \\ &= 9 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 6 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) + 6 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{aligned}$$

Como f é de classe C^2 em \mathbb{R}^2 , então pelo Teorema de Schwarz, temos $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) =$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y).$$

Logo,

$$g''(t) = 9 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 12 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$$

5. Seja, $z = f(u - 2v, v + 2u)$, onde $f(x, y)$ é de classe C^2 em \mathbb{R}^2 . Expresse $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ em termos das derivadas parciais de f .

Solução

Seja $z = f(x, y)$, onde $x = u - 2v, y = v + 2u$. Onde, $\frac{\partial x}{\partial u} = 1, \frac{\partial x}{\partial v} = -2, \frac{\partial y}{\partial u} = 2, \frac{\partial y}{\partial v} = 1$.

Pela regra da cadeia, temos

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Como $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ com $x = u - 2v, y = v + 2u$ são funções compostas, então, para derivá-las, usamos a regra da cadeia. Temos, então

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) \frac{\partial y}{\partial u} \right] \\ &\quad + 2 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \frac{\partial y}{\partial u} \right] \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y). \end{aligned}$$

Como f é de classe C^2 , então pelo teorema de Schwarz, segue que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$.

Logo,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$$

6. Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, D aberto, duas funções de classe C^2 e tais que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$$

Prove que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ e $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$.

Esta equação é conhecida como equação de Laplace.

Solução

Derivando $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$ em relação a x ; e $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$ em relação a y , temos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$$

$$\text{donde, } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}.$$

Como g é de classe c^2 então, pelo teorema de Schwarz, temos $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$.

$$\text{Logo, } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Derivando, $\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y}$ em relação, a x e $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}$ em relação a y , temos:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\text{Logo, } \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Como f é de classe c^2 , então $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Assim, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$.

7. Mostre que a seguinte função é solução da equação do calor, para a, b e c constantes.

$$w(x, t) = (\alpha \cos(cx) + \beta \sen(cx))e^{-ke^2t}$$

Solução

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -kc^2 e^{-kc^2t} (a \cos(cx) + b \sen(cx))$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = e^{-kc^2t} (-ac \sen(cx) + bc \cos(cx))$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = e^{-k^2t} (-ac^2 \cos(cx) - bc^2 \sen(cx)) =$$

$$= -c^2 e^{-kct} (a \cos(cx) + b \sen(cx))$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = k [-c^2 e^{-kct} (a \cos(cx) + b \sen(cx))] = k \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$$

Solução

8. Seja $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Determine $P_1(x, y)$, o polinômio de Taylor de ordem 1, de f em volta de $(1, 1)$.

(b) Utilizando $P_1(x, y)$, calcule um valor aproximado para $f(x, y)$, sendo $x = 1,001$ e $y = 0,99$.

Solução

(a) Temos $P_1(x, y) = f(1, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y - 1)$

Como $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 2x$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 + 4$, resulta $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 7$.

Então, $P_1(x, y) = 5 + 1(x - 1) + 7(y - 1)$, ou seja, $P_1(x, y) = x + 7y - 3$.

(b) Como $x = 1.001 \simeq 1$ e $y = 0.99 \simeq 1$, então

$$f(1.001, 0.99) \simeq P_1(1.001, 0.99) = 1.001 + 7 \cdot (0.99) - 3 = 1,001 + 6.93 - 3 = 4.931.$$

9. Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 de $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$, ao redor do ponto $(0, 0)$.

Solução

Temos

$$P_2(x, y) = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)x^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)y^2 \right].$$

Como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \operatorname{sen} y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \operatorname{cos} y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \operatorname{cos} y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -x \operatorname{sen} y$$

então, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$,
 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0$.

Assim, $P_2(x, y) = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot y + \frac{1}{2} [0 \cdot x^2 + 2 \cdot 1 \cdot xy + 0 \cdot y^2]$

ou seja, $P_2(x, y) = xy$

10. Use o polinômio de Taylor de ordem 2 de $f(x, y) = \operatorname{sen} x$ na origem para obter uma aproximado de $f(0.1, 0.1)$.

Solução

Como $(0.1, 0.1) \simeq (0, 0)$, então

$$f(0.1, 0.1) \simeq P_1(0.1, 0.1) = (0, 1)(0, 1)$$

ou seja,

$$f(0.1, 0.1) \simeq 0.01$$

Exercícios

1. Calcule todas as derivadas de segunda ordem da função $f(x, y) = x^3y^2 + xy^4$.
2. Calcule todas as derivadas de segunda ordem da função $f(x, y) = xy e^{xy^2}$.
3. Calcule todas as derivadas de segunda ordem da função $f(x, y, z) = x^2 \text{sen}(yz)$.
4. Calcule todas as derivadas de segunda ordem da seguinte função no ponto $(0, 0)$.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

5. Expresse $g''(t)$ em termos das derivadas parciais de f , sendo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável e sendo

$$g(t) = f(1 - t, t^2)$$

6. Considere $h(u, v) = f(u^2v^2, 2uv)$ onde $f(x, y)$ é uma função de classe C^2 . Expresse $\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}(u, v)$ em termos das derivadas parciais da função f .
7. A distribuição da temperatura de um disco com centro na origem é dada por $T(x, y)$ de classe C^2 em \mathbb{R}^2 . Sabe-se que $\frac{\partial^2 T}{\partial y \partial x} = 0$ e $\frac{\partial T}{\partial y}(x, y) = 2$. Calcule $\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(\rho, \theta)$, sendo $U(\rho, \theta) = T(\rho \cos \theta, \rho \text{sen} \theta)$.

8. Seja $v(r, \theta) = u(x, y)$, onde $x = r \cos \theta, y = r \text{sen} \theta$. Verifique que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}$$

9. Calcule $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1, 1)$ onde $z = f(x, y)$ é uma função de classe C^1 definida implicitamente pela equação $x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z$ sabendo que $f(1, 1) = 1$.
10. Dizemos que uma função de duas variáveis é harmônica se é de classe C^2 e satisfaz a equação de Laplace:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Mostre que a seguinte função é harmônica

$$k(x, y) = e^x \text{sen } y + e^y \cos x$$

11. Use o polinômio de Taylor de ordem 1 da função $f(x, y) = x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}$ no ponto $(1, 1)$ para obter uma aproximação de $f(1.1, 0.9)$.

12. Determine $P_2(x, y)$ de $f(x, y) = \ln(1 + x + 2y)$ ao redor de $(0, 0)$.
13. Usando o polinômio de Taylor de 2^a ordem para alguma função conveniente, dê um valor aproximado de $(0.95)^{2.01}$ (considere $f(x, y) = x^y = e^{y \ln x}$)

Respostas

1. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6x^2y + 4y^3, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^3 + 12xy^2.$
2. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^{y^2(1+2y^2)}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2xye^{y^2}(3 + 2y^2).$
3. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \text{sen}(yz), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2xz \text{cos}(yz), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 2xy \text{cos}(yz),$
 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x^2z^2 \text{sen}(yz), \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = -x^2yz \text{sen}(yz), \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -x^2y^2 \text{sen}(yz).$
4. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$
5. $g''(t) = f_{xx}(1 - t, t^2) - 4tf_{xy}(1 - t, t^2) + 4t^2f_{yy}(1 - t, t^2) + 2f_y(1 - t, t^2).$
6. $\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}(u, v) = 2v^2 f_x(u^2v^2, 2uv) + 4u^2v^4 f_{xx}(u^2v^2, 2u) + 8uv^3 f_{xy}(u^2v^2, 2uv) + 4v^2 f_{yy}(u^2v^2, 2uv).$
7. $\rho \cos \theta \frac{\partial T}{\partial x}(\rho \cos \theta, \rho \text{sen} \theta) + \rho^2 \text{sen}^2 \theta \frac{\partial T}{\partial x^2}(\rho \cos \theta, \rho \text{sen} \theta)$
8. sem resposta
9. $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1, 1) = -3.$
10. sem resposta
11. 0.95
12. $x + 2y - \frac{x^2}{2} - 2xy - 2y^2$
13. 0.90225

