Funções escalares de várias variáveis

Derivadas Direcionais. Propriedades do Vetor Gradiente.

Objetivos:

- definição de derivada direcional; derivada direcional como taxa de variação;
- interpretação geométrica da derivada direcional;
- propriedades do vetor gradiente.

Derivada direcional

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, D aberto, e $(a, b) \in D$.

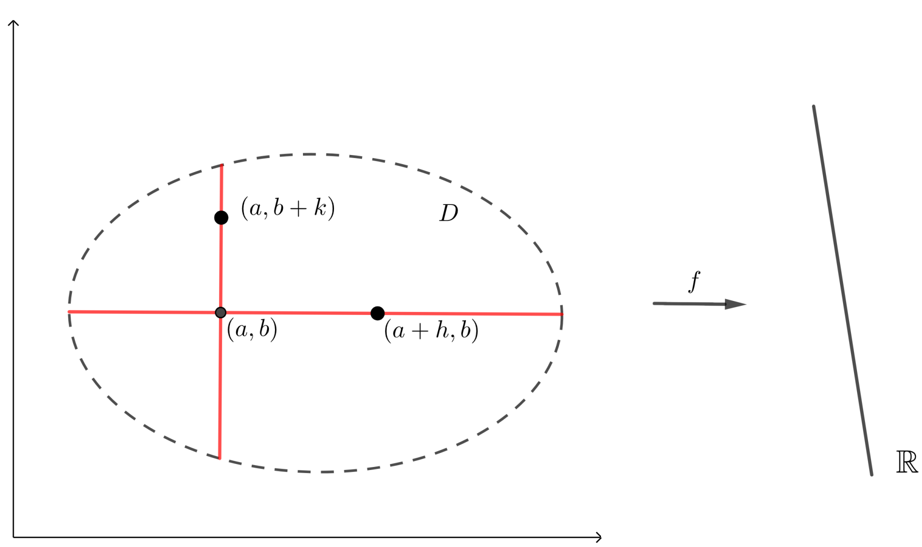

Figure 1: Segmento interseção $C_2 : x = a, y \in I_2$ e $C_1 : y = b, x \in I_1$

Vimos no capítulo de derivadas parciais, que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h},$$ se existir o limite,

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim\limits_{k \to 0} \dfrac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k}$, se existir o limite.

Como $\dfrac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$ é a taxa de variação média de f quando se passa de (a, b) para $(a+h, b)$, então $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ é a taxa de variação de f em (a, b) na direção do eixo x ou na direçãõ do vetor unitário $\vec{\imath}$.

Analogamente, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ é a taxa de variação de f em (a, b) na direção do eixo y ou na direção do vetor unitário $\vec{\jmath}$.

Pergunta natural: Seja $\vec{u} = (u_1, u_2)$ um vetor unitário em $\mathbb{R}^2$, isto é, $u_1^2 + u_2^2 = 1$. Qual é a taxa de variação de f em (a, b), na direção do vetor $\vec{u} = (u_1, u_2)$?

Solução

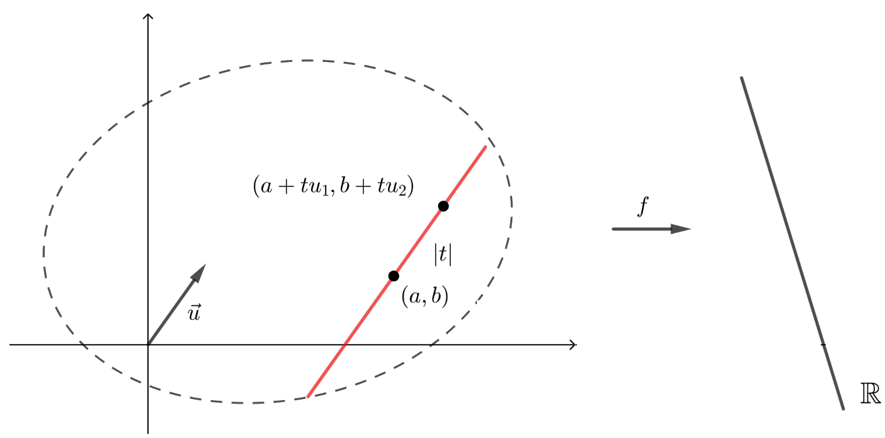

Figure 2: Segmento interseção $C : (x, y) = (a + tu_1, b + tu_2), t \in I$

Seja r a reta que passa pelo ponto (a, b) e é paralela ao vetor $\vec{u} = (u_1, u_2)$. Uma equação paramétrica dela é:

$$r : (x, y) = (a, b) + t\vec{u} = (a, b) + t(u_1, u_2) = (a + tu_1, b + tu_2), t \in \mathbb{R}$$

Seja $C \subset$ reta r, tal que $C \subset D$. Então, temos $C : (x, y) = (a + tu_1, b + tu_2), t \in I$.

Observe que I deve conter o 0 para garantir que $(a, b) \in C$. Aliás,

$$\|(x, y) - (a, b)\| = \|t\vec{u}\| = |t| \underbrace{\|\vec{u}\|}_{1} = |t|.$$

Logo, podemos calcular a taxa de variação média de f em (a, b) quando se passa de (a, b) para $(x, y) = (a + tu_1, b + tu_2)$ como sendo:

$$\frac{f(a + tu_1, b + tu_2) - f(a, b)}{\|(x, y) - (a_1 b)\|} = \frac{f(a + tu_1, b + tu_2) - f(a, b)}{|t|}.$$

Donde a taxa de variação (instantânea) de f em (a,b) na direção do vetor unitário $\vec{u}$ ou a derivada direcional de f em (a,b) na direção do vetor unitário $\vec{u}=(u_1,u_2)$ é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a,b)=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(a+tu_1,b+tu_2\right)-f(a,b)}{t},$$

se o limite existir.

Observações

(I) Na direção do eixo OX, $\vec{u}=\vec{\imath}=(1,0)$, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\imath}}(a,b)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t,b)-f(a,b)}{t}=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$$

(II) Na direção do eixo OY, $\vec{u}=\vec{\imath}=(0,1)$, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\jmath}}(a,b)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a,b+t)-f(a,b)}{t}=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

(III) Se $f:D\subset\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$, $(a,b,c)\in D$ e $\vec{u}=(a_1,u_2,u_3)$ é um vetor unitário, então

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a,b,c)=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(a+tu_1,b+tu_2,c+tu_3\right)-f(a,b,c)}{t},$$

se o limite existir.

(IV) Da definição de $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a,b)$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a,b)\simeq\frac{f(a+tu_1,b+t_2)-f(a,b)}{t},\quad \text{se}\quad t\simeq 0$$

ou

$$f(a+tu_1,b+tu_2)-f(a,b)\simeq t\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a,b),\quad \text{se}\quad t\simeq 0$$

Logo, também poderíamos usar a derivada direcional para aproximar valores da função f em pontos (x,y) próximos a (a,b) na direção do vetor $\vec{u}$.

$$f(x,y)\simeq f(a,b)+t\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a,b),\quad (x,y)=(a+tu_1,b+tu_2),\quad t\simeq 0$$

Interpretação geométrica de $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a,b)$: Geometricamente, estamos fazendo a restrição de f sobre a reta $r:(x,y)=(a+tu_1,b+tu_2)$ e olhando para a curva interseção do gráfico de f e o plano $(x,y,z)=(a+tu_1,b+tu_2,s)$, $t\in I$, $s\in\mathbb{R}$. Dessa maneira, o número $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a,b)$ é o coeficiente angular da reta tangente à curva interseção no ponto $(a,b,f(a,b))$ relativo à reta r. Isto é $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a,b)=\tan\alpha$.

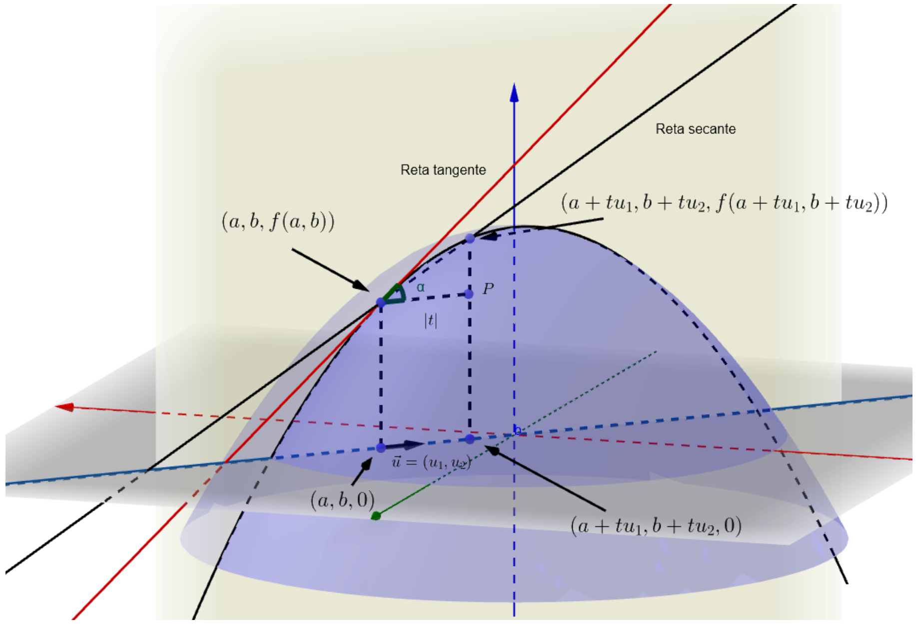

Figure 3: Interpretação geométrica das derivadas direcionais

Propriedades do vetor gradiente:

Teorema Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, D aberto, diferenciável em $(a, b) \in D$. Seja $\vec{u} = (u_1, u_2)$ um vetor unitário. Então

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b) = \nabla f(a, b) \cdot \vec{u}$$

Demonstracão:

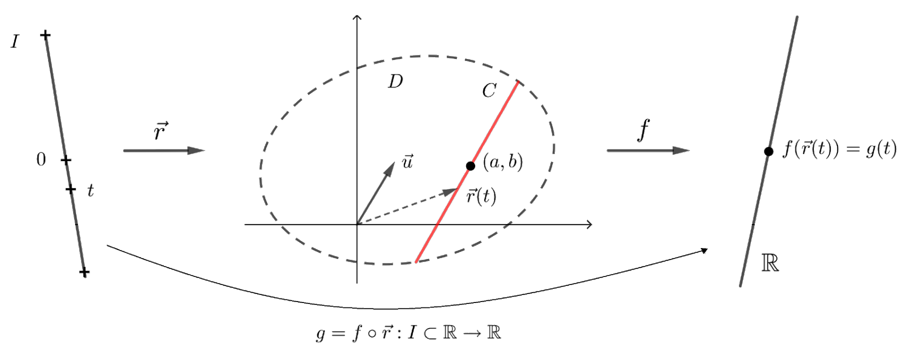

Figure 4: Composição de f com a parametrização do segmento $C : (x, y) = (a + tu_1, b + tu_2), t \in I$

Uma parametrização de C é dada por

$$C : \vec{r}(t) = (a + tu_1, b + tu_2), t \in I \quad \text{(contendo 0)}$$

Observe que $\vec{r}$ é diferenciável em I e $\vec{r}(0) = (a, b)$. Temos a função composta $g(t) = f(\vec{r}(t)) = f(a + tu_1, b + tu_2)$. Pela regra da cadeia, temos

$$g'(0) = \nabla f(\vec{r}(0)) \cdot \vec{r}\,'(0) = \nabla f(a, b) \cdot (u_1, u_2) = \nabla f(a, b) \cdot \vec{u}.$$

Mas

$$g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tu_1, b + tu_2) - f(a, b)}{t} = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b).$$

Logo, $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b) = \nabla f(a, b) \cdot \vec{u}$, como queríamos demonstrar.

Observação:

(I) Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, D aberto, diferenciável em $(a, b, c) \in D$ e $\vec{u}$ um vetor unitário de $\mathbb{R}^3$, então

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b, c) = \nabla f(a, b, c) \cdot \vec{u}$$

(II) Seja f diferenciável em X_0, tal que $\nabla f(X_0) \neq \overrightarrow{0}$. Então,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(X_0) = \nabla f(X_0) \cdot \vec{u} = \|\nabla f(X_0)\| \underbrace{\|\vec{u}\|}_{1} \cos \alpha = \|\nabla f(x_0)\| \cos \alpha,$$

onde $\alpha \in [0, \pi]$ é o ângulo entre os vetores $\nabla f(X_0)$ e $\vec{u}$.

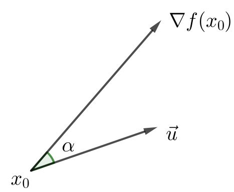

Figure 5: Ângulo entre o vetor gradiente e o vetor unitário

Como $-1 \leqslant \cos \alpha \leqslant 1$, então $-\|\nabla f(X_0)\| \leqslant \dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(X_0) \leqslant \|\nabla f(X_0)\|$.

Conclusão: O valor máximo de $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(X_0)$ é igual a $\|\nabla f(X_0)\|$ e ocorre quando $\alpha = 0$ ou quando $\vec{u}$ for o versor de $\nabla f(X_0)$. Já o valor mínimo de $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(X_0)$ é igual a $-\|\nabla f(X_0)\|$ e ocorre quando $\vec{u} = -\dfrac{\nabla f(X_0)}{\|\nabla f(X_0)\|}$.

Portanto, estando em X_0, é na direção do vetor $\nabla f(x_0)$ que f cresce mais rapidamente. E é na direção de $-\nabla f(x_0)$ que f decresce mais rapidamente.

Interpretação geométrica do vetor gradiente Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em $(a, b) \in D$ (aberto), tal que $\nabla f(a, b) \neq (0, 0)$. Seja $k = f(a, b)$. Considere a curva de nível de f, no nivel k, que passa por (a, b):

$$C_k : f(x, y) = k.$$

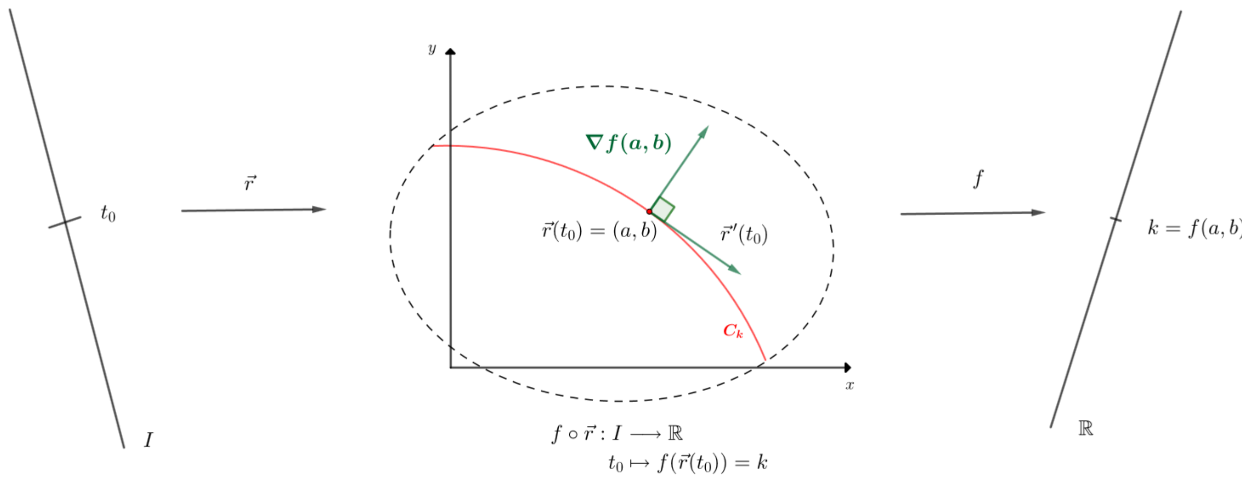

Figure 6: O vetor gradiente é perpendicular à curva de nível

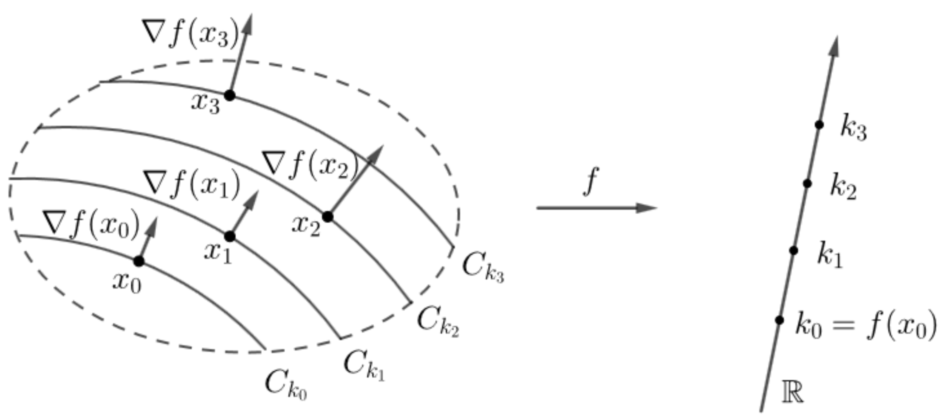

Figure 7: O vetor gradiente em várias curvas de nível

Seja $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t_0 \in I$, uma parametrização diferenciável de C_k. Seja $t_0 \in I$, tal que, $\vec{r}(t_0) = (a, b)$. Temos a função composta $f(\vec{r}(t)) = k$, para todo $t \in I$. Derivando em relação a t, temos $(f(\vec{r}(t)))' = 0$, para todo t.

Aplicando a regra da cadeia, temos $\nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = 0$, para todo t.

Em particular

$$\nabla f\left(\vec{r}\left(t_0\right)\right) \cdot \vec{r}'\left(t_0\right) = 0$$

ou

$$\nabla f(a,b), \vec{r}'\left(t_0\right) = 0$$

Como $\nabla f(a,b) \neq \overrightarrow{0}$, então $\nabla f(a,b) \perp \vec{r}(t_0)$.

Conclusão: se $\nabla f(a,b) \neq \overrightarrow{0}$, então $\nabla f(a,b) \perp C_k$ em (a,b), i.e., $\nabla f(a,b)$ é normal à curva de nível de f que passa por (a,b).

Portanto temos que:

Equação da reta tangente à curva de nível de f no ponto (a,b)

$$[(x,y)-(a,b)]\cdot \nabla f(a,b) = 0$$

Equação da reta normal à curva de nível de f no ponto (a,b)

$$(x,y) = (a,b) + \lambda \nabla f(a,b), \lambda \in \mathbb{R}$$

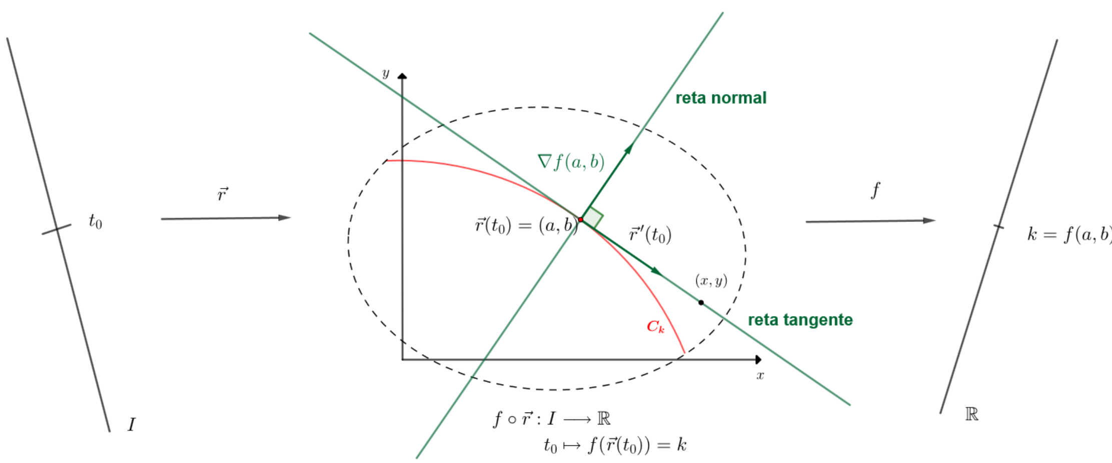

Figure 8: Reta normal e reta tangente à curva de nível

Observação: Seja: $f : D \subset \mathbb{R}^3$ R diferenciável em $(a,b,c) \in D$. Se $\nabla f(a,b,c) \neq \overrightarrow{0}$, então $\nabla f(a,b,c) \perp S_k$ em (a,b,c), onde S_k é a superfície de nível de f em (a,b,c), i.e. $\nabla f(a,b,c)$ é normal a superfície de nível de f que passa por (a,b,c).

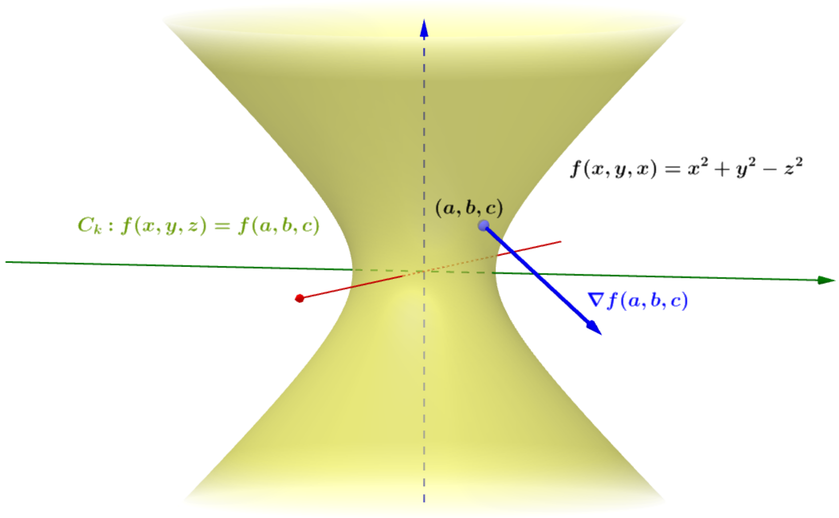

Figure 9: O vetor gradiente é perpendicular à superfície de nível de nível

Equação do plano tangente:

$$[(x, y, z) - (a, b, c)] \cdot \nabla f(a, b, c) = 0$$

Equação da reta normal:

$$(x, y, z) = (a, b, c) + \lambda \nabla f(a, b, c), \lambda \in \mathbb{R}$$

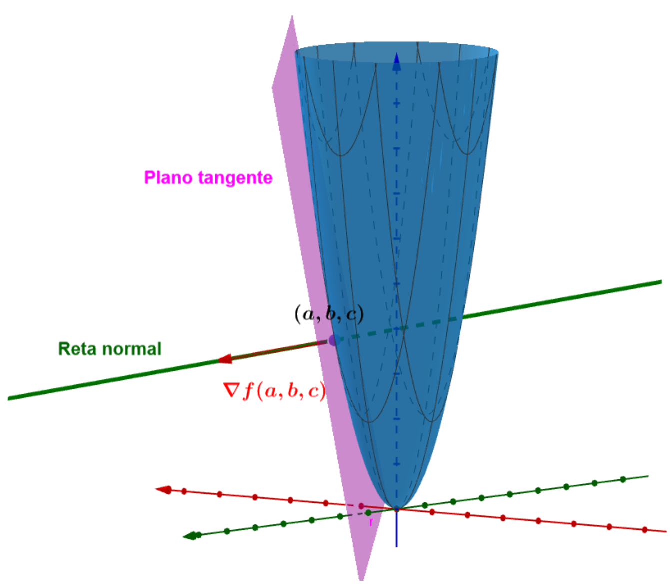

Figure 10: Plano tangente e reta normal à superfície de nível de nível $F(x, y, x) = x^2 + y^2 - z = 0$

Exemplos

1. Seja $f(x,y)=x^2+y^2$. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1)$, onde $\vec{u}$ é o versor de $\vec{v}=(-1,1)$.

   (a) pela definição;

   Solução

   Se $\vec{v}=(-1,1)$, então $\vec{u}=\dfrac{(-1,1)}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=\dfrac{(-1,1)}{\sqrt{2}}=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

   Então,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1)=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(1+t\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),1+t\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)-f(1,1)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\left(1-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(1+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2-2}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-\frac{2t}{\sqrt{2}}+\frac{t^2}{2}+1+\frac{2t}{\sqrt{2}}+\frac{t^2}{2}-2}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t}=\lim_{t\to 0}t=0.$$

   (b) usando o vetor gradiente.

   Solução

   Como $f(x,y)=x^2+y^2$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e $u=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ é unitário, temos

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1)=\nabla f(1,1)\cdot\vec{u}=(2x,2y)|_{(1,1)}\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=$$

$$=(2,2)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}=0$$

2. Seja $\vec{u}=(u_1,u_2)$ um vetor unitário. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)$, onde $f(x,y)=\dfrac{x^3}{x^2+y^2}$, se $(x,y)\neq(0,0)$ e $f(0,0)=0$.

   Solução

   Temos

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(tu_1,tu_2)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^3u_1^3}{t^2u_1^2+t^2u_2^2}-0}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^3u_1^3}{t^2\underbrace{(u_1^2+u_2^2)}_{1}\cdot t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t^3u_1^3}{t^3}=\lim_{t\to 0}u_1^3=u_1^3$$

3. Calcule a taxa de variação de $f(x,y)=e^{-x}\cos y$ em $(0,0)$ na direção que forma um ângulo de $45°$ com o eixo x positivo.

   Solução

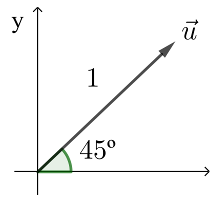

Figure 11: Vetor unitário com ângulo $45°$

Temos $\vec{u} = (\cos 45°, \operatorname{sen} 45°) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Como f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$, então a taxa de variação é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \vec{u} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) \cdot \vec{u}$$

$$= \left(-e^{-x} \cos y, -e^{-x} \operatorname{sen} y\right) |_(0,0) \cdot \vec{u} = (-1,0) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4. Calcule a derivada direcional de $f(x,y,z) = 3x^2 + 4y^2 + z$ em $(-1,2,-2)$ na direção do vetor $\vec{v} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$.

   Solução

   O versor de $\vec{v} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{k} = (-1,2,2)$ é $\vec{u} = \dfrac{(-1,2,2)}{\sqrt{1+4+4}} = \left(\dfrac{-1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$.

   Como f é diferenciável em $\mathbb{R}^3$, então $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(-1,2,2) = \nabla f(-1,2,-2) \cdot \vec{u}$, donde

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(-1,2,-2) = (6x, 8y, 1)|_{(1,2,-2)} \cdot \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) =$$

$$= (-6,16,1) \cdot \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = 2 + \frac{32}{3} + \frac{2}{3} = \frac{40}{3}.$$

5. Uma função diferenciável $f(x,y)$ tem no ponto $(1,1)$ derivada direcional igual a 3 na direção $3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$ e igual a -1 na direção $4\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$. Calcule

   (a) $\nabla f(1,1)$

   (b) $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1)$, onde $\vec{u}$ é o versor de $\vec{i} + \vec{\jmath}$.

   Solução

   (a) Temos

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}_1}(1,1) = 3, \quad \vec{u}_1 = \frac{(3,4)}{\sqrt{9+16}} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}_2}(1,1) = -1, \quad \vec{u}_2 = \frac{(4,-3)}{\sqrt{16+9}} = \left(\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}\right)$$

Donde

$$\begin{array}{c} \nabla f(1,1)\cdot\vec{u}_1 = 3 \\ \nabla f(1,1)\cdot\vec{u}_2 = -1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{3}{5}\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) + \dfrac{4}{5}\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 3 \\ \\ \dfrac{4}{5}\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) - \dfrac{3}{5}\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -1 \end{cases}$$

Multiplicando as duas equações por 5, temos

$$\begin{cases} 3\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) + 4\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 15 \\ \\ 4\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) - 3\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -5 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por 4 e a segunda por 3, temos

$$\begin{cases} 12\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) + 16\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 60 \\ \\ -12\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) + 9\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = +15 \end{cases}$$

Logo,

$$25\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 75 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 3 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1$$

Portanto, $\nabla f(1,1) = (1,3)$.

(b) Temos $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1) = \nabla f(1,1)\cdot\vec{u}$, onde $\vec{u} = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1) = (1,3)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

6. Seja $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ se $(x,y)\neq(0,0)$ e $f(0,0)=0$. Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) \neq \nabla f(0,0)\cdot\vec{u}$, onde $\vec{u} = (u_1,u_2)$ é um vetor unitário.

Solução

Temos $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Então $\nabla f(0,0) = (1,0)$. Logo,

$$\nabla f(1,0)\cdot(u_1,u_2) = (1,0)\cdot(u_1,u_2) = u_1.$$

Vimos anteriormente que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = u_1^3$. Logo, $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) \neq \nabla f(0,0)\cdot\vec{u}$. Isto acontece porque f não é diferenciável em $(0,0)$. Verifique!

7. Seja $f(x,y) = \ln\|(x,y)\|$.

(a) Determine $\vec{u}$ de modo que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,-1)$ seja máximo.

(b) Qual o valor máximo de $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1-1)$?

(c) Estando em $(1,-1)$, que direção deve-se tomar para que f cresca mais rapidamente? E em que direção decresce mais rapidamente?

Solução

Como $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$, então $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, $(x,y) \neq (0,0)$.

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,-1)$ é máxima $\Leftrightarrow \vec{u} = \dfrac{\nabla f(1,-1)}{\|\nabla f(1,-1)\|}$, onde

$$\nabla f(1,-1) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)\Big|_{(1,-1)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right).$$

Logo, $\vec{u} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{\vec{i}-\vec{j}}{\sqrt{2}}$

(b) O valor máximo de $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,-1)$ é igual a $\|\nabla f(1,-1)\| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(c) Em $(1,-1)$, f cresce mais rapidamente na direção de $\nabla f(1,-1) = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$ e decresce mais rapidamente na direção de $-\nabla f(1,-1) = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$.

8. Seja a temperatura do ar em um ponto do espaço dada pela função $f(x,y,z) = x^2 - y + z^2$. Um mosquito localizado em $(1,2,1)$ deseja esfriar o mais rápido possível. Em que direção ele deve voar?

Solução

Temos $\nabla f(1,2,1) = (2x,-1,2z)|_{(1,2,1)} = (2,-1,2)$. Como o sentido de $\nabla f(1,2,1)$ é aquele em que a temperatura cresce mais rapidamente, estando em $(1,2,1)$, então o mosquito deverá voar no sentido oposto, o de $-\nabla f(1,2,1) = (-2,1,-2)$.

9. A temperatura T em uma bola de metal é inversamente proporcional a distância do centro da bola, que tomamos com centro na origem. A temperatura no ponto $(1,2,2)$ é $90°$C.

(a) Determine a taxa de variação de T em $(1,2,2)$ em direção ao ponto $(2,1,3)$.

(b) Mostre que em qualquer ponto da bula a direção de maior crescimento na temperatura é dada pelo vetor que aponta para a origem.

Solução

Como a distância de (x,y,z) à origem é igual a $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ e a temperatura em (x,y,z) é inversamente proporcional a essa distância, então

$$T(x,y,z) = \frac{c}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, c>0, \quad (x,y,z) \neq (0,0,0)$$

Como $T(1,2,2) = 90^\circ$ então, $90 = \dfrac{c}{\sqrt{1+4+4}}$ ou $90 = \dfrac{c}{3}$, donde $c = 270$.

Logo, $T(x,y,z) = \dfrac{270}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, que é diferenciável em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

(a) Pondo $P = (1,2,2), Q = (2,1,3)$, então $\overrightarrow{PQ} = (2,1,3) - (1,2,2) = (1,-1,1)$ e o seu versor é $\vec{u} = \dfrac{(1,-1,1)}{\sqrt{1+1+1}} = \dfrac{(1,-1,1)}{\sqrt{3}}$. A taxa de variação de T em $P = (1,2,2)$ na direção de $\vec{u}$ é dada por

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{u}}(1,2,2) = \nabla T(1,2,2) \cdot \vec{u}.$$

Temos

$$\frac{\partial T}{\partial x}(1,2,2) = \left[\frac{-270\,\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2}\right]_{(1,2,2)} = \frac{-270}{(1+4+4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-270}{27} = -10$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}(1,2,2) = \left[\frac{-270y}{(x^2+y^2+z^2)}\right]_{(1,2,2)} = \frac{-540}{27} = -20$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}(1,2,2) = \left[\frac{-270z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right]_{(1,2,2)} = -20$$

Logo,
$\nabla T(1,2,2) = (-10,-20,-20)$. Então,

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{u}}(1,2,2) = (-10,-20,-20) \cdot \frac{(1,-1,1)}{\sqrt{3}} = \frac{-10+20-20}{\sqrt{3}} = -\frac{10}{\sqrt{3}}.$$

(b) A direção de maior crescimento na temperatura em qualquer (x,y,z) da bola é a do vetor $\nabla T(x,y,z) = \dfrac{270}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(-x,-y,-z)$ que aponta para a origem.

10. Determine as equações das retas tangente e normal à curva $C: e^{2x-y}+2x+2y = 4$ no ponto $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

Solução

Seja $f(x,y) = e^{2x-y}+2x+2y$. Logo, $f\left(\frac{1}{2},1\right) = = e^{1-1}+2\cdot\frac{1}{2}+2 = 4$.

Então C é a curva de nível de f no nível 4 e que passa pelo ponto dado. Temos $\nabla f(x,y) = (2e^{2x-y}+2, -e^{2x-y}+2)$, donde $\nabla f\left(\frac{1}{2},1\right) = (2e^{1-1}+2, -e^{1-1}+2) = (4,1)$. Sabemos que $\nabla f\left(\frac{1}{2},1\right)$ é normal a C em $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

Reta tangente: $\left[(x,y)-\left(\frac{1}{2},1\right)\right]\cdot\nabla f\left(\frac{1}{2},1\right) = 0$, donde $\left(x-\frac{1}{2}, y-1\right)\cdot(4,1) = 0 \Leftrightarrow 4x-2+y-1 = 0 \Leftrightarrow y = -4x+3$

Reta normal: $(x,y) = \left(\frac{1}{2},1\right)+\lambda\nabla f\left(\frac{1}{2},1\right), \lambda\in\mathbb{R} \Leftrightarrow (x,y) = \left(\frac{1}{2},1\right)+\lambda(4,1), \lambda\in\mathbb{R}$.

11. Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superfície $S : xyz + x^3 + y^3 + z^3 = 3z$ no ponto $(1, -1, 2)$.

Solução

Seja $f(x, y, z) = xyz + x^3 + y^3 + z^3 - 3z$.

Logo, $f(1, -1, 2) = -2+1-1+8-6 = 0$. Então, S é a superfície de f no nível 0 e que passa pelo ponto dado. Temos $\nabla f(x, y, z) = (yz + 3x^2, xz + 3y^2, xy + 3z^2 - 3)$, donde $\nabla f(1, -1, 2) = (-2 + 3, 2 + 3, -1 + 12 - 3) = (1, 5, 8)$.

Sabemos que $\nabla f(1, -1, 2)$ é perpendicular a S em $(1, -1, 2)$.

Plano tangente: $[(x, y, z)-(1, -1, 2)]\cdot\nabla f(1, -1, 2) = 0 \Leftrightarrow (x-1, y+1, z-2)\cdot(1$
$\Leftrightarrow x + 5y + 8z = 12$.

Reta normal: $(x, y, z) = (1, -1, 2)+\lambda\nabla f(1, -1, 2), \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x, y, z) = (1, -1, 2)+ \lambda(1, 5, 8), \lambda \in \mathbb{R}$.

Exercícios

1. Calcule a derivada direcional de $f(x, y) = \dfrac{2}{x^2 + y^2}$ no ponto $(-1, 1)$ e na direção do vetor $2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$.

2. Encontre a derivada direcional de $f(x, y, z) = xe^{y^2-z^2}$ em $(1, 2, -2)$ na direção do vetor tangente $\vec{r}\,'(t)$ à curva $\vec{r}(t) = (t, 2\cos(t - 1), -2e^{t-1})$.

3. Determine as direções em que a derivada direcional de $f(x, y) = x^2 + \operatorname{sen}(xy)$ no ponto $(1, 0)$ tem valor 1.

4. Determine a taxa de variação da função $z = \dfrac{(y - 1)^2}{x}$ no ponto $P_0(1, 2)$, na direção da normal à elipse $2x^2 + y^2 = 6$ no ponto P_0.

5. Seja $g(r, \theta) = f(x, y)$, com $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$, onde $f(x, y)$ é suposta diferenciável num aberto de $\mathbb{R}^2$. Sejam $\vec{u} = \cos\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j}$ e $\vec{v} = -\operatorname{sen}\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$. Mostre que

   (a) $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y)$ e $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = \dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x, y)$

   (b) $\nabla f(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y)\vec{u} + \dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x, y)\vec{v}$.

6. Considere a função $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y$ e o ponto $P_0 = (2, 2)$. Determine

   (a) A taxa de variação de f em P_0 na direção do vetor $(1, 1)$.

   (b) A taxa de variação de f em P_0 na direção do vetor tangente $\vec{r}\,'(t)$ a curva $\vec{r}(t) = (t, t^2 - t)$ em $(3, 6)$.

(c) A direção na qual a taxa de variação de f em P_0 é máxima.

7. A função diferenciável $f(x,y,z)$ tem no ponto $(1,1,1)$, derivada direcional igual a 1 na direção $4\vec{j}+3\vec{k}$, igual a 2 na direção $-4\vec{i}+3\vec{j}$ e igual a zero na direção $\vec{j}$. Calcule o valor máximo de $\dfrac{\partial f}{\partial u}(1,1,1)$

8. Seja $f(u,v,w)$ uma diferenciável em $P(0,0,0)$, tal que $\dfrac{\partial f}{\partial u}(P)=2$, $\dfrac{\partial f}{\partial v}(P)=-3$ e $\dfrac{\partial f}{\partial \omega}(P)=2$. Defina $g(x,y)=f(5x-5,2xy-2,4y^2-4)$. Determine a taxa de variação de g no ponto $(1,1)$ e na direção do vetor $-\vec{i}+\vec{j}$.

9. Suponha que, para todo $t, f\left(3t,t^3\right)=\arctan t$, onde $f(x,y)$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(3,1)=2$. Calcule a taxa de variação de f em $(3,1)$ na direção de um vetor tangente à curva $x^2+4y^2=13$ no ponto $(3,1)$.

10. Seja $g(x,y)=xf\left(x^2+y^2,2y,2x-y\right)$. Suponha que $f(2,2,1)=1$, $\dfrac{\partial f}{\partial u}(2,2,1)=-1$, $\dfrac{\partial f}{\partial v}(2,2,1)=2$ e $\dfrac{\partial f}{\partial \omega}(2,2,1)=-2$.

    (a) Calcule a taxa de variação de g no ponto $(1,1)$ na direção da normal à elipse $2x^2+y^2=3$ no ponto $(1,1)$.

    (b) Calcule a taxa de variação máxima de g no ponto $(1,1)$. Em que direção isso ocorre?

11. Suponha que $T(x,y)=40-x^2-2y^2$ representa uma distribuição de temperatura no plano xy e um individuo que se encontra na posição $(3,2)$ pretende dar um passeio

    (a) Descreva o lugar geométrico dos pontos que ele deverá percorrer para desfrutar sempre da mesma temperatura.

    (b) Qual a direção e sentido que deverá tomar se quisesse caminhar na direção de maior crescimento da temperatura?

    (c) Se x e y são medidos em km e a temperatura em 0°C, de quanto a temperatura se elevará aproximadamente, caso caminhe $0,01\ km$ na direção encontrada no item b?

12. Determine uma equação do plano tangente e uma equação da reta normal ao hiperboloide de equação $x^2-2y^2-4z^2=10$ no ponto $(4,-1,1)$.

13. Determine uma reta que seja tangente a curva $x^2+xy+y^2=7$ e paralela a reta $4x+5y=17$.

14. Determine um plano que seja tangente a superfície $x^2+3y^2+2z^2=\frac{11}{6}$ e paralelo ao plano $x+y+z=10$.

15. Considere a função $z = \dfrac{\sqrt[4]{8+x^2+y^2}}{y}$. Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico da função dada no ponto $(2,2,1)$.

16. Considere a curva C intersecção das superfícies de equações $S_1 : x^2-2xz+y^2z=3$ e $S_2 : 3xy-2yz=-2$. Determine:
    (a) um vetor tangente a C em $(1,-2,1)$.
    (b) Os pontos do hiperboloide $x^2+y^2-z^2+12=0$, onde o plano tangente é perpendicular ao vetor encontrado no item (a).

Respostas

1. $-\frac{\sqrt{13}}{13}$
2. $-\frac{7\sqrt{5}}{5}$
3. $\vec{u}=\vec{j}, \vec{u}=\frac{4}{5}\vec{i}-\frac{3}{5}\vec{j}$
4. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
5. sem resposta
6. (a) $3\sqrt{2}$
   (b) $\frac{7\sqrt{26}}{13}$
   (c) $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$
7. $\frac{5}{6}\sqrt{13}$
8. $3\sqrt{2}$
9. $-\frac{8}{3}$
10. (a) $\frac{-6\sqrt{5}}{5}$
    (b) $\sqrt{41}$ na direção $-5\vec{\imath}+4\vec{\jmath}$
11. (a) $C : x^2+2y^2=17$ (elipse)
    (b) $-6\vec{\imath}-8\vec{\jmath}$
    (c) A temperatura se elevará aproximadamente de $0,1$° C na direção de $-\frac{3}{5}\vec{i}-\frac{4}{5}\vec{j}$
12. $2x-2y-z+1=0$
13. $2x+y-2z=5; (x,y,z)=(4,-1,1)+\lambda(8,4,-8), \lambda\in\mathbb{R}$
14. $y-2=-\frac{4}{5}(x-1)$ ou $y+2=-\frac{4}{5}(x+1)$
15. $x+y+z=\frac{11}{6}$ ou $x+y+z=-\frac{11}{6}$

16. (a) $(3, 2, 4)$

 (b) $(6, 4, -8)$ e $(-6, -4, 8)$