Funções escalares de várias variáveis

Curvas de nível

Objetivos:

- Compreender a noção de curvas de nível e sua relação com o domínio, imagem e gráfico da função;
- Calcular e identificar a curva de nível que passa por um dado ponto.
- Esboçar curvas de nível; Mapa de contorno.

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \in D \longmapsto z = f(x, y) \in \mathbb{R}$
Seja $k \in Im(f)$, o conjunto $C_k = \{(x, y) \in D; \quad f(x, y) = k\} \subset D \subset \mathbb{R}^2$ é dito curva de nível de f no nível k.

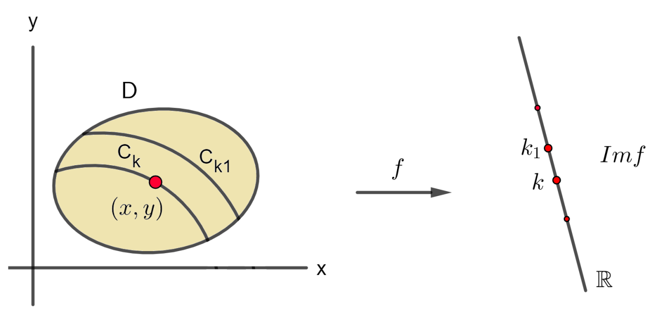


Figure 1: Relação da curva de nível com o domínio e a imagem da função

Observe que a curva $f(C_k)$ (imagem da curva de nível C_k pela função $f(x, y)$) é a curva interseção do gráfico da função f com o plano $z = k$.

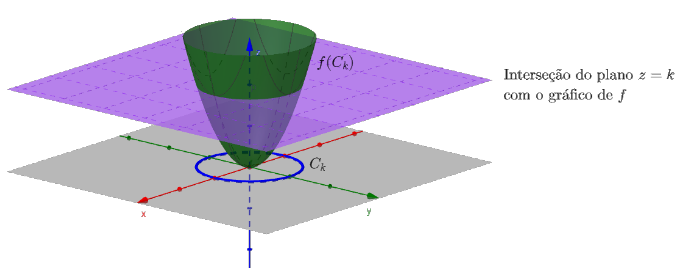


Figure 2: Relação da curva de nível com o gráfico da função

Observações:

(I) $C_k \subset D \subset \mathbb{R}^2, \quad f(C_k) \subset G_f \subset \mathbb{R}^3$

(II) Se $f(x,y)$ é a temperatura no ponto (x,y), então C_k é uma isoterma (pontos de mesma temperatura)

(III) Se f é energia potencial, então C_k é uma curva equipotencial.

Exemplos

1. Seja $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$. Determine:

   (a) D_f

   (b) $Im(f)$

   (c) G_f

   (d) curvas de nível C_k.

   Solução

   (a) $D_f = \mathbb{R}^2$

   (b) $Im(f) =]-\infty, 1]$

   (c) $G_f : z = 1 - x^2 - y^2$. Vamos utilizar traços para esboçar G_f. Impondo $x = 0$, obtemos $z = 1 - y^2$, de modo que a interseção do G_f com plano yz $(x = 0)$ é uma parábola. Impondo $z = 0$, obtemos o traço $x^2 + y^2 = 1$, que corresponde a uma circunferência no plano xy. Assim, temos a forma da superfície que é chamada de paraboloide.

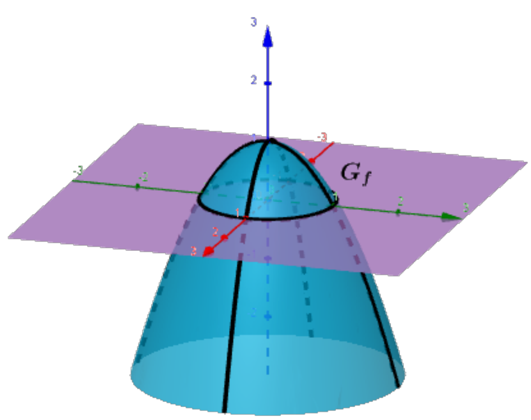


Figure 3: Gráfico da função $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$

   (d) Seja $k \in Im(f) =]-\infty, 1]$. Então, a curva de nível C_k é dada por

$$C_k : 1 - x^2 - y^2 = k \Longrightarrow C_k : x^2 + y^2 = 1 - k$$

Para $k = 1$, temos $C_1 : x^2 + y^2 = 0 \Longrightarrow x = 0, y = 0$. Logo, $C_1 = \{(0,0)\}$. Para $k < 1$, donde $1 - k > 0$, temos $C_k : x^2 + y^2 = (\sqrt{1-k})^2$. Assim, as curvas de nível (k<1) são circunferências concêntricas de centro na origem e raio $\sqrt{1-k}$.

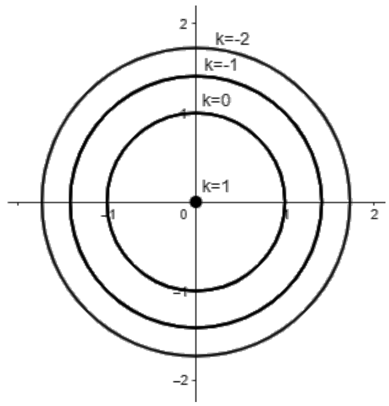


Figure 4: Curvas de nível da função $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$

2. Seja $z = f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Determine:

   (a) D_f

   (b) $Im(f)$

   (c) G_f

   (d) curvas de nível C_k.

Solução

(a) $D_f : 1 - x^2 - y^2 \geqslant 0 \Longrightarrow D_f : x^2 + y^2 \leqslant 1$ (disco de centro em $(0,0)$ e raio 1)

(b) $Im(f) = [0,1]$

(c) $G_f : z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \Rightarrow G_f : z^2 = 1 - x^2 - y^2, z \geqslant 0 \Longrightarrow G_f : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geqslant 0$ (hemisfério superior de centro em $(0,0,0)$ e raio 1)

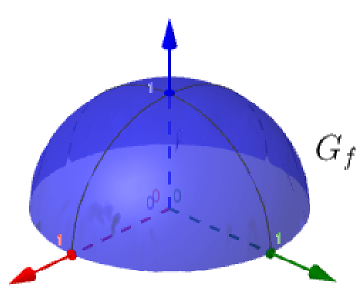


Figure 5: Gráfico da função $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

(d) Seja $k \in Imf = [0,1]$. A curva de nível correspondente a $z = k$ é

$$C_k : f(x,y) = k \quad \text{ou} \quad \sqrt{1-x^2-y^2} = k \quad \text{ou} \quad x^2+y^2 = 1-k^2$$

Para $k = 0$, temos $C_0 : x^2 + y^2 = 1$.

Para $k = 1$, temos $C_1 : x^2 + y^2 = 0$, então $C_1 = \{(0,0)\}$.

Para k, tal que $0 < k < 1$, temos circunferência concêntricas de centro na origem e raio $\sqrt{1-k^2}$.

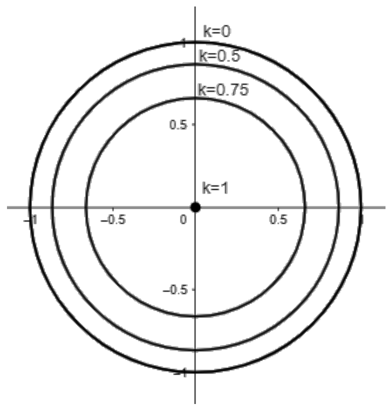


Figure 6: Curvas de nível da função $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

Observação: $f(x,y) = -\sqrt{a^2-x^2-y^2} \Rightarrow G_f : z = -\sqrt{a^2-x^2-y^2}$. Portanto, $G_f : x^2+y^2+z^2 = a^2, z \leqslant 0$ (hemisfério inferior de centro na origem e raio 1).

3. Seja $z = f(x,y) = 1 - x^2$. Determine:

(a) D_f

(b) $Im(f)$

(c) G_f

(d) curvas de nível C_k.

Solução

(a) $D_f = \mathbb{R}^2$

(b) $Im(f) =]-\infty, 1]$

(c) $G_f : z = 1 - x^2$. Observe que a equação do gráfico, $z = 1 - x^2$, não envolve a variável y. Portanto, qualquer plano vertical $y = k$ (paralelo ao plano xz) intercepta o G_f segundo uma parábola de equação $z = 1 - x^2$. Assim, G_f é obtido tomando a parábola $z = 1 - x^2$ no plano xz e movendo-a na direção do eixo y. A superfície é dita cilindro parabólico.

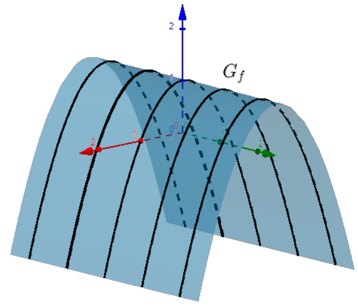


Figure 7: Gráfico da função $f(x, y) = 1 - x^2$

(d) Seja $k \in Im(f) =]-\infty, 1]$. A curva de nível correspondente é

$$C_k : 1 - x^2 = k \Longrightarrow C_k : x^2 = 1 - k > 0 \Longrightarrow C_k : x = \pm\sqrt{1-k}$$

Se $k = 1$, temos $C_1 : x = 0$ (eixo y);
Se $k < 1$, temos $C_k =$ reta $x = \sqrt{1-k}$ ou reta $x = -\sqrt{1-k}$

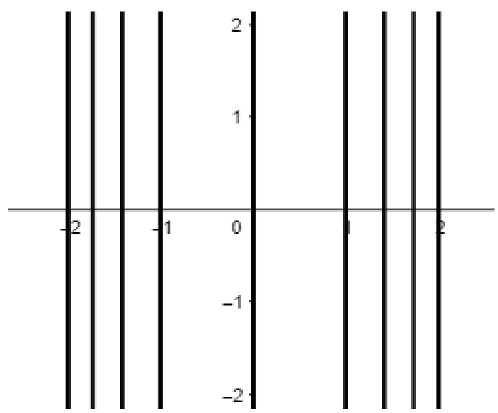


Figure 8: Curvas de nível da função $f(x, y) = 1 - x^2$

Observação: $f(x, y) = x^2, g(x, y) = a^2 - y^2 \Longrightarrow$ G$_f$ e G_g são cilindros parabólicos.

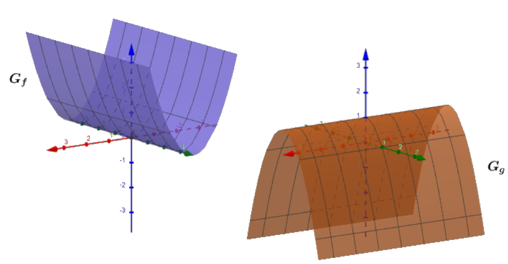


Figure 9: Cilindros parabólicos

4. Seja $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Determine:

(a) D_f

(b) $Im(f)$

(c) G_f

(d) curvas de nível C_k.

Solução

(a) $D_f = \mathbb{R}^2$

(b) $Im(f) = [0, +\infty[$

(c) $G_f : z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Fazendo $x = 0$, temos $z =| y |$, que é a curva interseção do G_f com plano yz. Fazendo $z = c$, $c > 0)$, temos $x^2 + y^2 = c^2$, de modo que a interseção do G_f com o plano horizontal $z = c$ é uma circunferência. Assim, temos que G_f é a parte superior do cone.

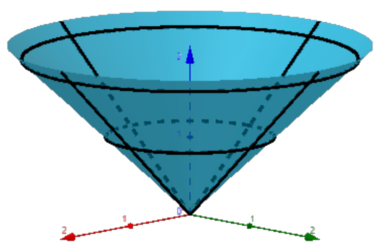


Figure 10: Gráfico da função $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(d) Seja $k \in Im(f) = [0, +\infty[$. Então, a curva de nível correspondente é dada por $C_k : \sqrt{x^2 + y^2} = k$ ou $x^2 + y^2 = k^2$.
Se $k = 0$, temos $C_0 = \{(0, 0)\}$.
Se $k > 0$ temos circunferências concêntricas na origem e raio k.

Observações:

(i) Os gráficos de $f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$,$f(x, y) = a - \sqrt{x^2 + y^2}$, $f(x, y) = \sqrt{3(x^2 + y^2}$, $f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$ são partes de cones circulares.

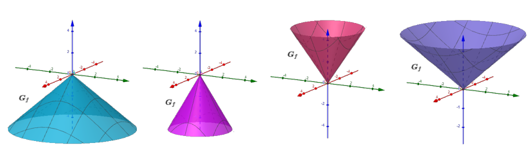


Figure 11: Cones circulares

(ii) O gráfico de $f(x, y) = \sqrt{ax^2 + by^2}, a > 0, b > 0, a \neq b \Longrightarrow G_f$ é a parte superior do cone elíptico.

5. Seja, $z = f(x, y) = y^2 - x^2$. Determine:

(a) D_f

(b) $Im(f)$

(c) G_f

(d) curvas de nível C_k.

Solução

(a) $D_f = \mathbb{R}^2$

(b) $Im(f) = \mathbb{R}^2$

(c) $G_f : z = y^2 - x^2$. Fazendo $x = 0$, o traço no plano yz é a parábola $z = y^2$ com concavidade para cima. Os traços verticais $y = k$ são parábolas $z = k^2 - x^2$ com concavidade para baixo. Os traços horizontais $z = k, \quad k > 0$, são hipérboles $y^2 - x^2 = k$ e os tracos horizontais $z = -k, k > 0$, são hipérboles $x^2 - y^2 = k_0$. Assim, temos o esboço do G_f, dito paraboloide hiperbólico (que tem a forma de uma sela).

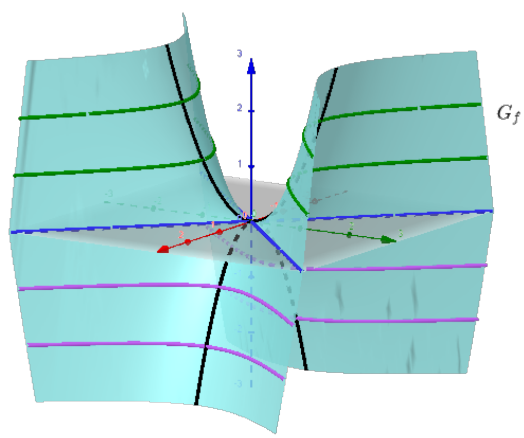


Figure 12: Gráfico da função $f(x, y) = y^2 - x^2$

(d) Seja $k \in Im(f) = \mathbb{R}$. A curva de nível correspondente é dada por

$$C_k : y^2 - x^2 = k$$

Se $k > 0$, temos hipérboles com vértices $(0, \pm\sqrt{k})$.

Se $k = 0$, temos duas retas pela origem, $y = x$ e $y = -x$.

Se $k < 0$, temos hipérboles com vértices $(\pm\sqrt{-k}, 0)$.

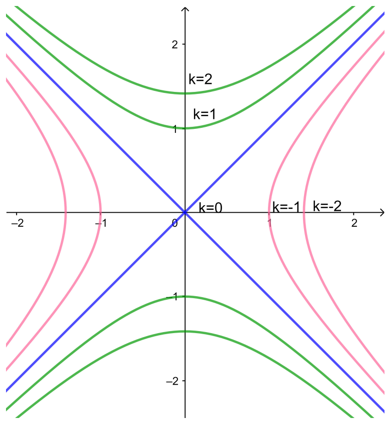


Figure 13: Curvas de nível da função $f(x,y)=y^2-x^2$

6. Seja, $z=f(x,y)=-\sqrt{4-x^2-y^2}$. Determine:

   (a) A curva de nível que passa pelo ponto $(0,\sqrt{3})$.

   (b) A reta tangente à curva de nível do item (a) no ponto $(1,\sqrt{2})$. Identifique o vetor velocidade.

   (c) Esboce em um único gráfico a curva, a reta tangente e a direção do vetor velocidade.

Solução

(a) Como $f(0,\sqrt{3})=-1$, então a curva de nível é $-\sqrt{4-x^2-y^2}=-1$, isto é, $C_{-1}: x^2+y^2=3$.

(b) Observe que $f(1,\sqrt{2})=-1$. portanto $(1,\sqrt{2})\in C_{-1}$ e faz sentido calcular a reta tangente a C_{-1} nesse ponto. Caso contrário não existiria.

Uma parametrização de C_{-1} é $\gamma: \begin{cases} x(t)=\sqrt{3}\cos t \\ y(t)=\sqrt{3}\,\text{sen}\, t \end{cases}$, $\forall t\in[0,2\pi]$.

Portanto, a equação paramétrica da reta seria $\gamma(s_0)+\gamma'(s_0)t$, $\forall t\in\mathbb{R}$, onde s_0 é tal que $\gamma(s_0)=(1,\sqrt{2})$.

Calculando s_0 $\begin{cases} \sqrt{3}\cos s_0=1 \\ \sqrt{3}\,\text{sen}\, s_0=\sqrt{2} \end{cases}$ e substituindo na derivada da parametrização, $\gamma': \begin{cases} x'(t)=-\sqrt{3}\,\text{sen}\, t \\ y'(t)=\sqrt{3}\cos t \end{cases}$, temos que $\gamma'(s_0)=(-\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}})$.

Daí, a equação paramétrica da reta tangente é: $(1,\sqrt{2})+(-\sqrt{2},1)t$, $\forall t\in\mathbb{R}$.

O vetor velocidade é $\gamma'(s_0)=(-\sqrt{2},1)$. A direção dele é $\vec{v}=\frac{\gamma'(s_0)}{||\gamma'(s_0)||}=(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$.

(c)

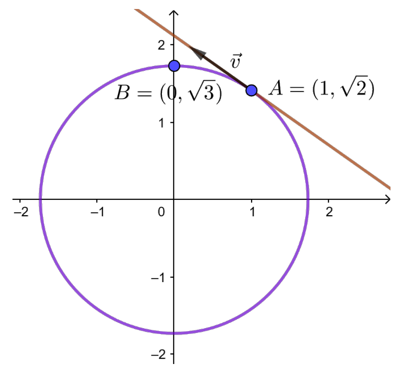


Figure 14: Curvas de nível da função $f(x,y) = -\sqrt{4-x^2-y^2}$ que passa pelo ponto $(0,\sqrt{3})$ (em roxo)

Exercícios

1. Seja $z = f(x,y) = \sqrt{2y - x^2 - y^2}$. Determine:
    (a) D_f
    (b) $Im(f)$
    (c) G_f
    (d) curvas de nível C_k.
2. Seja $z = f(x,y) = 1 - x^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0$ e $x + y \leqslant 1$. Determine:
    (a) D_f
    (b) $Im(f)$
    (c) G_f
    (d) curvas de nível C_k.
3. Seja a função $z = f(x,y) = \frac{y}{x-2}$. Determine:
    (a) D_f
    (b) $Im(f)$
    (c) curvas de nível C_k.
4. Seja a funcão $z = f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$. Determine:
    (a) D_f
    (b) $Im(f)$
    (c) curvas de nível C_k.
5. Suponha que $T(x,y) = 4x^2 + 9y^2$ (em C°) represente uma distribuição de temperatura no plano xy. Desenhe a isoterma correspondente à temperatura de $36°$C.

6. Uma chapa plana de metal está situada em um plano xy, de modo que a temperatura (em $^\circ$) no ponto (x, y) é inversamente proporcional a distância da origem.

   (a) Descreva as isotermas.

   (b) Se a temperatura no ponto $P(4, 3)$ é 40°C, ache a equação da isoterma para uma temperatura de 20°C.

   (c) curvas de nível C_k.

7. Seja, $z = f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2y}$.

   (a) Esboce o mapa de contorno de f.

   (b) Determine uma equação da reta tangente à curva de nível que passa pelo ponto $(0, 6)$ no ponto $(-3, 3)$. Identifique o vetor velocidade.

   (c) Identifique a curva de nível do item (b) no mapa de contorno do item (a). Esboce a reta tangente e a direção do vetor velocidade no mapa de contorno.

Respostas

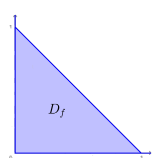
1. (a) $D_f = \{(x, y); x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$

   (b) $Im(f) = [0, 1]$

   (c) $G_f : x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1, 0 \leqslant z \leqslant 1$, semi-esfera.

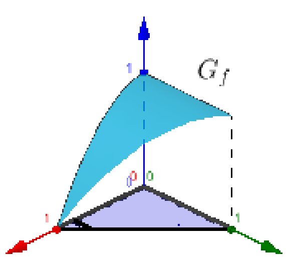
   (d) $C_0 : x^2 + (y - 1)^2 = 1$, $C_1 = \{(0, 1)\}$. Se $0 < k < 1$, temos circunferências concêntricas de centro $(0, 1)$ e raio $\sqrt{1 - k^2}$.

2. (a) D_f :

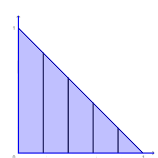


   (b) $Im(f) = [0, 1]$

   (c) G_f :



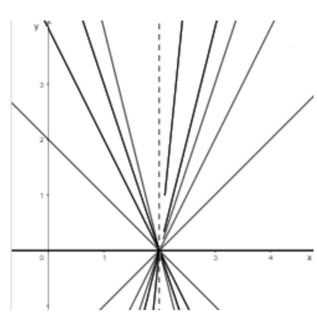
   (d) C_k :



3. (a) $D_f = \{(x, y); x \neq 2\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{$ reta $x = 2\}$

   (b) $Im(f) = \mathbb{R}$

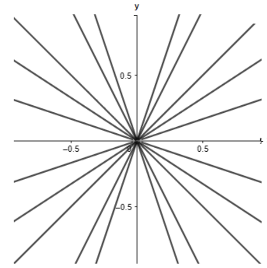
   (c) $C_k : y = k(x - 2), x \neq 2$.



4. (a) $D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

   (b) $Im(f) = [0,1]$

   (c) $C_0 : x = 0, y \neq 0$; $C_1 : y = 0, x \neq 0$; $C_k : y = \pm\sqrt{\frac{1-k}{k}}x$, $x \neq 0$, $0 < k < 1$.

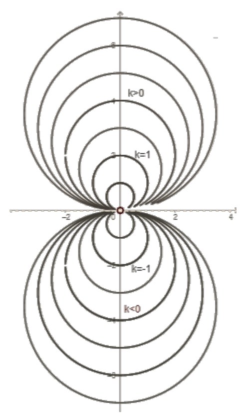


5. $c_{36} : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

6. (a) Circunferências com centro em $(0,0)$

   (b) $x^2 + y^2 = 100$

7. (a)



   (b) Reta tangente a C_3 em $(-3,3)$ é $(-3,3) + (0,-3)t$, $\forall t \in \mathbb{R}$.A direção do vetor velocidade é $\vec{v} = (0,-1)$

   (c)