Cálculo diferencial de funções de várias variáveis

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

May 6, 2023

Begoña Alarcón e Rioco Kamei

Índice

Lista de Figuras

Introdução

Neste texto (em desenvolvimento) o leitor poderá encontrar o conteúdo básico para qualquer disciplina de cálculo diferencial de funções de várias variáveis. O objetivo deste projeto é apresentar a matéria com um visual mais atraente para o aluno, flexível e fácil de adaptar a qualquer modalidade de ensino: presencial, híbrido ou a distancia.

Pretende-se incorporar conteúdos mais aplicados às ciências e engenharias. Por exemplo, uma visão das derivadas parciais como taxas de variação ou dar uma estimação (linear ou quadrática) de uma lei a partir de dados experimentais, entre outros.

Este texto faz parte dos recursos educacionais digitais que estão sendo elaborados e coletados na plataforma

https://redmatuff.github.io/calculovariasvariaveis/

Agradecemos imensamente a Rioco Kamei (professora aposentada da UFF) por ter cedido para este projeto suas notas de aula manuscritas. Esses textos foram a base da apostila que agora apresentamos. Por esse motivo a Profa. Rioco foi convidada para fazer parte da coautoria do manual, embora ela não seja responsável pelo produto final.

Gostaríamos também de agradecer a forte colaboração da monitora Maria Américo na digitalização de textos e criação das figuras.

Se você é aluno e tem sugestões para aprimorar o texto: apresentação do conteúdo, figuras, mais exemplos, etc, não duvide em entrar em contato com a Profa. Begoña Alarcón!! Entendam que este texto é para vocês, alunos. Façamos dele um material aconchegante!

Email de contato: balarcon@id.uff.br

Dedicado a todos os alunos que me inspiraram ao longo de minha carreira como docente na UFF e a todos os alunos que encontrem neste texto seu instrumento de aprendizagem para disciplinas de cálculo de funções de várias variáveis.

Capítulo 1: Funções vetoriais de uma variável

Domínio, imagem e parametrização de curvas

Objetivos:

- Compreender a noção de função vetorial de uma variável, domínio, imagem e gráfico;
- Identificar as equações paramétricas de uma curva como a imagem de uma função vetorial;
- Relacionar equações paramétricas e cartesianas de curvas básicas.

Definição: Uma função de uma variável real a valores em $\mathbb{R}^n$ é uma função do tipo

$$\vec{r} : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\text{número } t \in I \longmapsto \text{ vetor } \vec{r}(t) \in \mathbb{R}^n$$

onde I pode ser um intervalo ou uma união de intervalos. No caso em que I for um intervalo, a função $\vec{r}$ também é dita de caminho em $\mathbb{R}^n$.

O conjunto I é o domínio de $\vec{r}$, $Dom(\vec{r}) = I$.

O conjunto $Im(\vec{r}) = \vec{r}(I) = \{\vec{r}(t) \in \mathbb{R}^n; t \in I\}$ é a imagem, traço ou trajetória do caminho $\vec{r}$.

Se $\vec{r}$ é um caminho em $\mathbb{R}^2$, podemos escrever

$$\vec{r}'(t) = (x(t), y(t)) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath},$$

onde $x(t)$ e $y(t)$ são as funções coordenadas de $\vec{r}$.

Em geral, se I for um intervalo, a imagem $\vec{r}(I)$ é uma curva em $\mathbb{R}^2$, onde

$$\vec{r} : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in I \end{cases}$$

é uma parametrização da curva $C = \vec{r}(I)$.

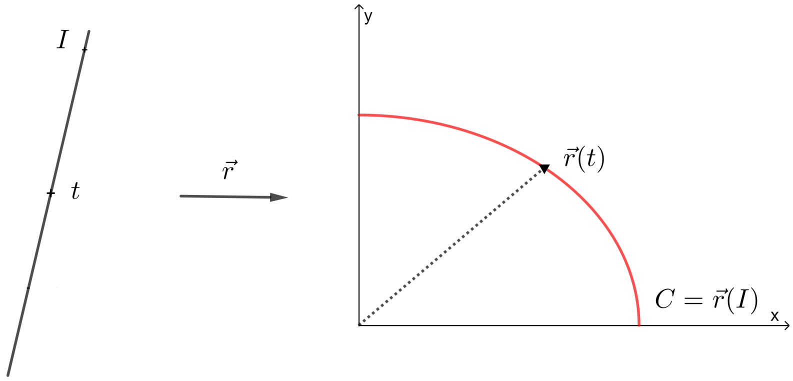


Figure 1: Parametrização de uma curva $C \subset \mathbb{R}^2$

Analogamente, se $\vec{r}$ é um caminho em $\mathbb{R}^3$, podemos escrever $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$.

Em geral, $C = \vec{r}(I)$ é uma curva espacial, parametrizada por

$$\vec{r}: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t), \quad t \in I \end{cases}$$

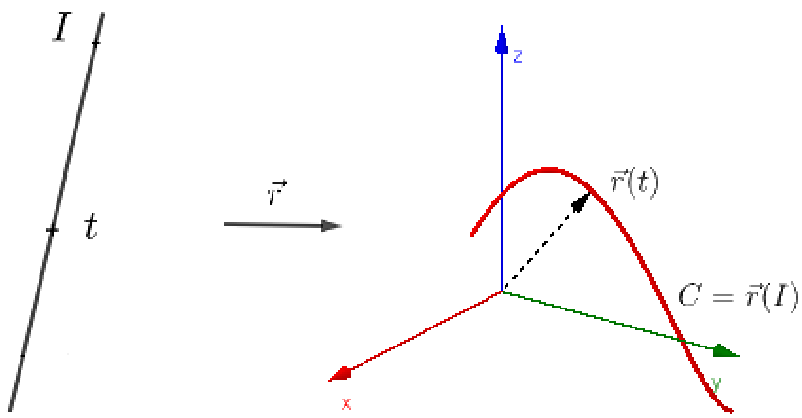


Figure 2: Parametrização de uma curva $C \subset \mathbb{R}^3$

<u>Observação</u>: Não devemos confundir a imagem ou traço de uma função vetorial com seu gráfico.

O gráfico de $\vec{r}: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é o conjunto $Gr(\vec{r}) = \{(t, \vec{r}(t)) \ : \ t \in I\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Assim, um caminho em $\mathbb{R}^2$ possui seu domínio em $\mathbb{R}$, seu traço ou imagem em $\mathbb{R}^2$ e seu gráfico em $\mathbb{R}^3$. Por exemplo, no caso da função vetorial $\vec{r}(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$, $t \in \mathbb{R}$:

$Dom(\vec{r}) = \mathbb{R}$, $Im(\vec{r})$ é a curva em $\mathbb{R}^2$

$$\vec{r} : \begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \operatorname{sen}(t), \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

correspondente à circunferência de centro $(0,0)$ e raio $R = 1$. Já o gráfico é o conjunto $Gr(\vec{r}) = \{(t, \cos(t), \operatorname{sen}(t)) \ : \ t \in \mathbb{R}\}$ o qual é um curva em $\mathbb{R}^3$ parametrizada por

$$\vec{\gamma} : \begin{cases} x = t \\ y = \cos(t) \\ z = \operatorname{sen}(t), \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

correspondente a uma hélice.

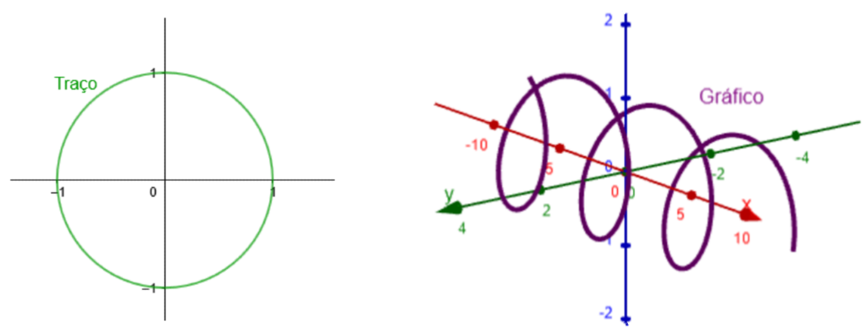


Figure 3: O traço e o gráfico de uma função vetorial de uma variável

Observação: Se t é interpretado como tempo, então $\vec{r}(t)$ representa o vetor posição de uma partícula em movimento no instante t.

Exemplos

1. Seja $\vec{r}(t) = (t, t^2)\,, t \in \mathbb{R}$, A imagem de $\vec{r}$ é a curva dada pela parametrização

$$\vec{r} : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Eliminando o parâmetro t, temos as equações cartesianas da curva

$$C : y = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

correspondente ao gráfico da função $f(x) = x^2$.

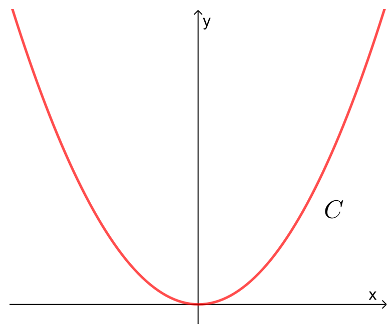


Figure 4: O gráfico de uma função escalar como imagem de uma função vetorial

2. Seja $\vec{r}(t) = (a\,\textsf{sen}\,t, a\,\textsf{cos}\,t)$, $a > 0$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Como $\vec{r}(0) = \vec{r}(2\pi) = (0, a)$, então a imagem de $\vec{r}$ é uma curva fechada. Temos

$$\vec{r}: \begin{cases} x = a\,\textsf{sen}(t) \\ y = a\,\textsf{cos}(t) \end{cases} \quad , \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Eliminando o parâmetro t, temos que a imagem do caminho fechado é a curva $C: x^2 + y^2 = a^2$, isto é, a circunferência de centro $(0, 0)$ e raio $R = a$.

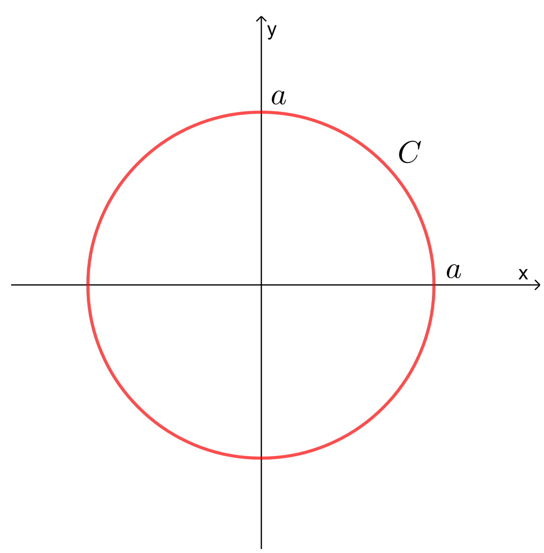


Figure 5: A circunferência como imagem de uma função vetorial

Observação: A parametrização de uma curva não é única. A diferencia entre esta parametrização e a do exemplo anterior é a orientação. Observe que neste exemplo a parametrização traça a curva em sentido contrário ao crescimento do parâmetro. Isto é, o parâmetro vai crescendo em sentido anti-horário e a parametrização traça a curva em sentido horário. Se diz que a parametrização possui orientação negativa.

3. Parametriza a curva $C: x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$, $y \geq 0$.

Solução Seja $P(x, y) \in C$

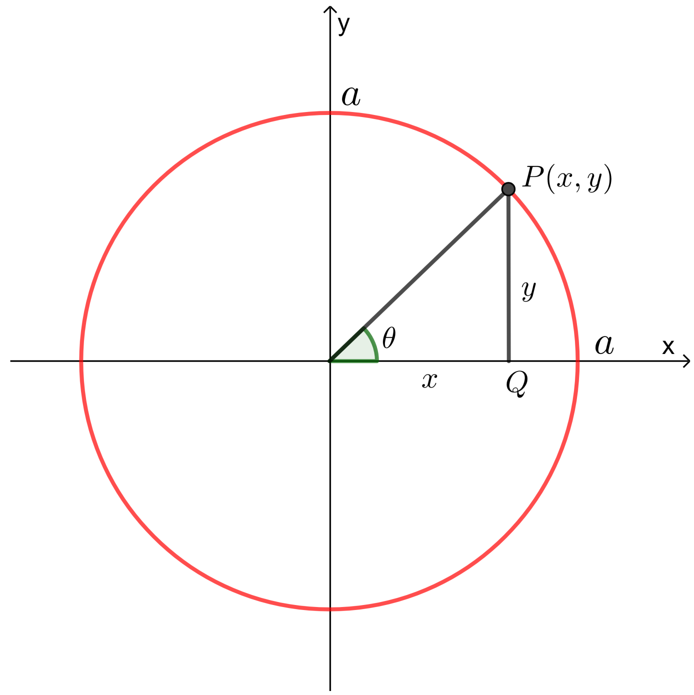


Figure 6: Parametrização da circunferência

no triângulo retângulo OPQ, temos

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \quad , \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Observe que o ângulo somente poder variar de 0 a π pois $y \geq 0$. Fazendo $\theta = t$, temos uma parametrização de C

$$\vec{r}(t) = (a\cos t, a\,\text{sen}\,t), \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Fazendo $\theta = 2t$ temos uma outra parametrização de C:

$$\vec{r}(t) = (a\cos(2t), a\,\text{sen}(2t)), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

Exercícios

1. Determine as equações cartesianas das curvas dadas pelas seguintes parametrizações. Esboce as curvas.

   (a) $\vec{r}_1(t) = (t, t-2)$, $t \in \mathbb{R}$.

   (b) $\vec{r}_2(t) = (4+t, 4-t)$, $t \in [0, 1]$.

   (c) $\vec{r}_3(t) = (2\cos t, 2\,\text{sen}\,t)$, $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

   (d) $\vec{r}_4(t) = (2\cos t, 3\,\text{sen}\,t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

(e) $\vec{r}_5(t) = (\pm \cosh t, \operatorname{senh} t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(f) $\vec{r}_6(t) = (\sec t, \tan t)$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.

2. Esboce a imagem das seguintes funções:

(a) $\vec{r}_1(t) = (t - 4, t^2 + 5)$, $t \in \mathbb{R}$.

(b) $\vec{r}_2(t) = (t, \pm\sqrt{1 - t^2})$, $\forall |t| < 1$.

(c) $\vec{r}_3(t) = (t, \pm\sqrt{t^2 - 1})$, $\forall |t| > 1$.

(d) $\vec{r}_4(t) = (t^2, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(e) $\vec{r}_5(t) = (\cos t, \cos^2 t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(f) $\vec{r}_6(t) = (\cos^2 t, \operatorname{sen}^2 t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(g) $\vec{r}_7(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(h) $\vec{r}_8(t) = (t, t - 1, t + 2)$, $t \in \mathbb{R}$.

(i) $\vec{r}_9(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

3. Determine uma parametrização das seguintes curvas:

(a) $C_1 : y = 1 + 2x$

(b) $C_2 : y = x^3$

(c) Circunferência de centro $(2, 3)$ e raio $R = 4$ com orientação positiva.

(d) Elipse de centro $(1, 1)$ e semi-eixos $a = 1$ e $b = 2$ com orientação negativa.

(e) $C_3 : y^2 - x^2 = 4$

4. Determine uma parametrização da curva interseção das superfícies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $z = 1 + y$. Faça um esboço das superfícies e a curva.

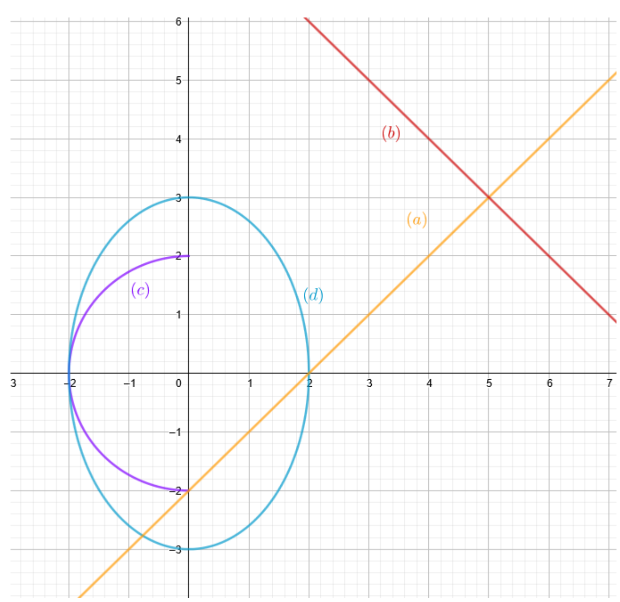
Respostas

1. (a) $y = x - 2$

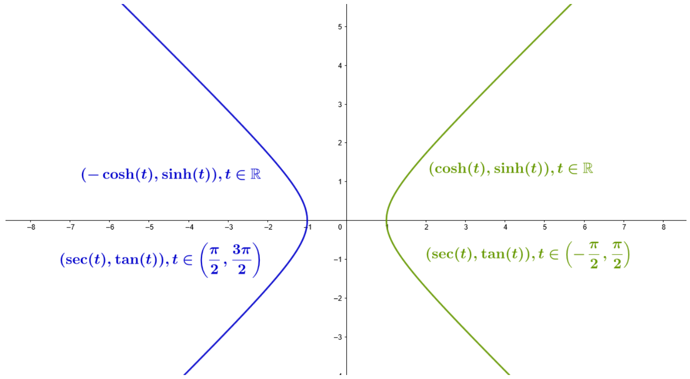
(b) $x + y = 8$

(c) $x^2 + y^2 = 4$, $x \leq 0$

(d) $9x^2 + 4y^2 = 36$



(e) $x^2 - y^2 = 1$ (f) $x^2 - y^2 = 1$



2.

3. (a) $C_1 \ : \ (x, y) = (t, 1 + 2t)$, $t \in \mathbb{R}$.
   (b) $C_2 \ : \ (x, y) = (t, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$.
   (c) $C_3 \ : \ (x, y) = (2 + 2\cos t, 3 + 2\operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
   (d) $C_4 \ : \ (x, y) = (1 + \operatorname{sen} t, 1 + 4\cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
   (e) $C_5 \ : \ (x, y) = (\pm 2\operatorname{senh} t, 2\cosh t)$, $t \in \mathbb{R}$.

4. $\vec{r}(t) = (t, \frac{1}{2}(t^2 - 1), \frac{1}{2}(t^2 + 1))$, $t \in \mathbb{R}$.

Limites, derivada e vetor tangente

Objetivos:

- Cálculo de limite de uma função vetorial em um ponto;
- Continuidade e diferenciabilidade. Propriedades da derivada;
- Cálculo e interpretação geométrica da derivada; equação paramétrica da reta tangente.

Seja $\vec{r} : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, com $\vec{r}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, uma função vetorial de uma variável.

Limite: Seja $t_0 \in I \subset \mathbb{R}$ ou um extremo de algum dos intervalos em I. Dizemos que $L = (L_1, ..., L_n) \in \mathbb{R}^n$ é limite de $\vec{r}$, quando $t \to t_0$, i.e., $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = L$, se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que $||\vec{r}(t) - L|| < \varepsilon$, sempre que $t \in I$ e $|t - t_0| < \delta$.

Teorema:

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = L \iff \lim_{t \to t_0} x_i(t) = L_i, \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

Observe que cada coordenada $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, é uma função escalar de uma variável, portanto seu limite será calculado com em Cálculo IA. Por exemplo:

$$\lim_{t \to 2} (t^2, t) = (4, 2).$$

Caso um dos limites $\lim\limits_{t \to t_0} x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, não existir, diremos que o limite $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t)$ não existe. Por exemplo, $\lim\limits_{t \to 0} (t, \operatorname{sen} \frac{1}{t})$.

Caso algum dos limites $\lim\limits_{t \to t_0} x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, for infinito e os restantes existirem, diremos que $\lim\limits_{t \to t_0} ||\vec{r}(t)|| = \infty$. Por exemplo, $\lim\limits_{t \to 1} (t, \frac{1}{t-1})$.

Continuidade. Seja $t_0 \in I \subset \mathbb{R}$. Dizemos que $\vec{r}$ é contínua em t_0 se $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$.

Dizemos que $\vec{r}$ é contínua se $\vec{r}$ for contínua em cada $t \in I$.

Teorema:

$\vec{r}$ é contínua em $t_0 \Longleftrightarrow x_i(t)$ é contínua em t_0, $\forall i = 1, \ldots, n$.

De novo, como cada coordenada $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, é uma função escalar de uma variável, devemos estudar a continuidade das n funções, isto é, verificar que $\lim\limits_{t\to t_0} x_i(t) = L_i$, para cada $i = 1, \ldots, n$.

Caso alguma das funções coordenadas não for contínua em t_0, diremos que $\vec{r}(t)$ não é contínua em t_0. Por exemplo, $\vec{r}(t) = (\cos t, \dfrac{\operatorname{sen} t}{t})$ não é contínua em 0, embora $\lim\limits_{t\to 0} (\cos t, \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}) = (1, 1)$, pois o ponto não pertence ao domínio; e sim é contínua em π, pois as duas funções coordenada são contínuas no ponto.

Derivada Seja $t_0 \in$ I, não sendo extremo de nenhum dos intervalos de I. Definimos a derivada de $\vec{r}$ no ponto t_0 como sendo

$$\vec{r}'(t_0) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(t_0 + h) - \vec{r}(t_0)}{h},$$

desde que o limite exista.

Dizemos que $\vec{r}$ é diferenciável em t_0 se existir a derivada em t_0. Dizemos que $\vec{r}$ é diferenciável se $\vec{r}$ for diferenciável em cada t de seu domínio I.

Teorema:

$\vec{r}$ é diferenciável em $t_0 \Longleftrightarrow x_i(t)$ for diferenciável em t_0, $i = 1, \ldots, n$ e

$$\vec{r}'(t_0) = (x_1'(t_0), \ldots, x_n'(t_0)).$$

Caso uma das derivadas $x_i'(t_0)$, $i = 1, \ldots, n$, não existir, diremos que a derivada $\vec{r}'(t_0)$ não existe e portanto a função vetorial não é diferenciável em t_0. Por exemplo, $\lim\limits_{t\to 0} (\sqrt{t}, 1 - t)$.

Observação: Como a continuidade e a diferenciabilidade se dão coordenada a coordenada, é facil provar que:

Se $\vec{r}$ é diferenciável em $t_0 \implies \vec{r}$ é contínua em t_0.

Assim, se uma das funções coordenadas $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$ não for contínua em t_0, então a função vetorial $\vec{r}$ não seria contínua em t_0 e também não diferenciável em t_0.

Propriedades da derivada: Sejam $\vec{r}, \vec{s} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ funções vetoriais e $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função escalar, todas elas diferenciáveis em I aberto. Então

1. $f\vec{r}$ é diferenciável e $(f\vec{r})'(t) = f'(t)\vec{r}(t) + f(t)\vec{r}'(t)$

2. $\vec{r}\cdot\vec{s}$ é diferenciável e $(\vec{r}\cdot\vec{s})'(t)=\vec{r}'(t)\cdot\vec{s}(t)+\vec{r}(t)\cdot\vec{s}'(t)$

3. Se $n=3$, $\vec{r}\times\vec{s}$ é diferenciável e $(\vec{r}\times\vec{s})'(t)=\vec{r}'(t)\times\vec{s}(t)+\vec{r}(t)\times\vec{s}'(t)$.

Observação: Seja $\vec{r}:I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ um caminho (I intervalo) derivável até a 2^a ordem. Se $\vec{r}(t)$ denota o vetor posição no instante t de uma partícula ρ que se move em $\mathbb{R}^n$, $n=2,3$, definimos o vetor velocidade $\vec{v}(t)$ e o vetor aceleração $\vec{a}(t)$ por

$$\vec{v}(t)=\vec{r}'(t)=\frac{d\vec{r}}{dt}(t) \quad e \quad \vec{a}(t)=\vec{r}''(t)=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t)$$

Definimos a velocidade escalar e a aceleração escalar por:

$$v(t)=\|\vec{v}(t)\|=\|\vec{r}'(t)\| \quad \text{e} \quad a(t)=\|\vec{a}(t)\|=\|\vec{r}''(t)\|=\|\vec{v}'(t)\|.$$

Interpretação geométrica de $\vec{r}'(t_0)\neq\overrightarrow{0}$. Observe que o vetor $\dfrac{\vec{r}(t_0+h)-\vec{r}(t_0)}{h}$ é paralelo ao vetor $\vec{r}(t_0+h)-\vec{r}(t_0)$. Fazendo h cada vez menor, tem-se que o vetor $\dfrac{\vec{r}(t_0+h)-\vec{r}(t_0)}{h}$ é cada vez mais próximo do vetor tangente à curva imagem no ponto $\vec{r}(t_0)$.

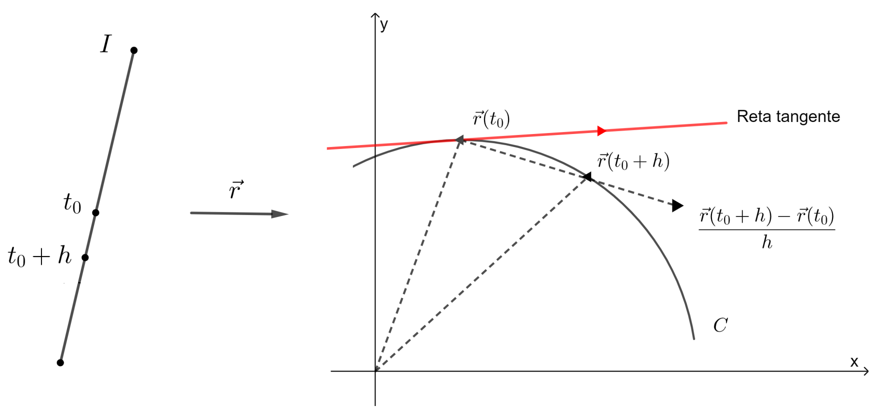


Figure 7: Interpretação geométrica de $\vec{r}'(t_0)\neq\overrightarrow{0}$

Portanto, podemos dizer que $\vec{r}'(t_0)$, ou vetor velocidade do caminho $\vec{r}$ no instante t_0, é o vetor tangente à curva $C:\vec{r}(I)$ no ponto $\vec{r}(t_0)$. Portanto, uma equação paramétrica da reta tangente à curva C no ponto $\vec{r}(t_0)$ seria

$$(x_1,\ldots,x_n)=\vec{r}(t_0)+\lambda\vec{r}'(t_0),\lambda\in\mathbb{R}$$

Exemplos

1. Determine a equação da reta tangente à trajetória de $\vec{r}(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t,1)$ no ponto $\vec{r}(\frac{\pi}{3})$.

Solução Temos $\vec{r}(\frac{\pi}{3}) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$, $\vec{r}'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)$, portanto $\vec{r}'(\frac{-3}{2}, \frac{1}{2}, 0)$. A equação da reta tangente é:

$$(x, y, z) = \vec{r}(\frac{\pi}{3}) + \lambda \vec{r}'(\frac{\pi}{3}), \lambda \in \mathbb{R}$$

Ou seja,

$$(x, y, z) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1) + \lambda(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0), \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Seja $\vec{r}(t) = a\cos(wt)\vec{\imath} + b\operatorname{sen}(wt)\vec{\jmath}$, onde a, b, w são constantes. Mostre que $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -w^2\vec{r}$.

   Solução Temos $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = -aw\operatorname{sen}(wt)\vec{\imath} + bw\cos(wt)\vec{\jmath}$ e $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -aw^2\cos(wt)\vec{\imath} - bw^2\operatorname{sen}(wt)\vec{\jmath}$. Logo, $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -w^2[a\cos(wt)\vec{\imath} + b\operatorname{sen}(wt)\vec{\jmath}]$, ou seja,

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -w^2\vec{r},$$

   Como queríamos mostrar.

3. Um ponto se move no espaço de modo que $||\vec{v}(t)|| = k$, para todo t, onde $k > 0$ é uma constante. Prove que $\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) = 0$, para todo t.

   Solução Temos $||\vec{v}(t)||^2 = \vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t)$, para todo t, donde $\vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t) = k^2$, para todo t. Derivando os dois lados em relação a t, temos $\vec{v}'(t) \cdot \vec{v}(k) + \vec{v}(t) \cdot \vec{v}'(t) = 0$, para todo t.

   Como o produto escalar é comutativo, temos $2\vec{v}(t) \cdot \vec{v}'(t) = 0$, para todo t,

   Ou seja, $\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) = 0$, para todo t, como queríamos provar.

Exercícios

1. Considere a curva definida por $\vec{r}(t) = (1 + 2\ln(1+t), 1 + (1+t)^2)$, $t > -1$.
   (a) Determine uma equação cartesiana da reta tangente à curva no ponto $(1, 2)$.
   (b) Dê uma equação cartesiana da curva.

2. Um objeto inicia seu movimento no ponto $(0, -4)$ e se move as longo da parábola $y = x^2 - 4$, com velocidade horizontal $\dfrac{dx}{dt} = 2t - 1$. Encontre o vetor posição do objeto, os vetores velocidade e aceleração no instante $t = 2$.

3. Seja $\vec{r} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, I intervalo, derivável até a 2^a ordem em I. Suponha que existe um real λ, tal que, para todo $t \in I, \vec{r}''(t) = \lambda\vec{r}(t)$. Prove que $\vec{r}(t) \times \vec{r}'(t)$ é constante em I.

Respostas

1. (a) $y - x = 1$
   (b) $y = 1 + e^{x-1}, x \in \mathbb{R}$
2. $\vec{r}(2) = (2, 0)$, $\vec{v}(2) = (3, 12)$, $\quad \vec{a}(2) = (2, 26)$.

Capítulo 2: Funções escalares de várias variáveis

Domínio, imagem e gráfico

Objetivos:

- Compreender a noção de função escalar de várias variáveis, domínio, imagem e gráfico;
- Calcular e esboçar os conjuntos domínio, imagem e gráfico;

Uma função real de n variáveis é uma função do tipo $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, que associa a cada n-upla $(x_1, ..., x_n) \in D$ um único número $w = f(x_1, ..., x_n)$. O conjunto D é o domínio da função; a imagem da função é dada pelo conjunto

$$Im(f) = \{w = f(x_1, ...x_n) \in \mathbb{R}; (x_1, ..., x_n) \in D\} = f(D) \subset \mathbb{R}$$

e o conjunto

$$G_f = \{(x_1, ..., x_n, w) \in \mathbb{R}^{n+1}; w = f(x_1, ...x_n), (x_1, ..., x_n) \in D\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

é o gráfico da função.

Observações:

(I) Se $n = 1 \Longrightarrow f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função real de uma variável.

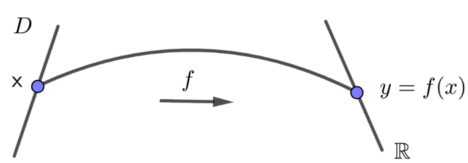


Figure 8: Domínio e imagem de uma função real de uma variável real

Temos:

(i) D é o domínio da função

(ii) $Im(f) = \{y = f(x) \in \mathbb{R}; x \in D\} \subset \mathbb{R}$

(iii) $G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = f(x), x \in D\} \subset \mathbb{R}^2$

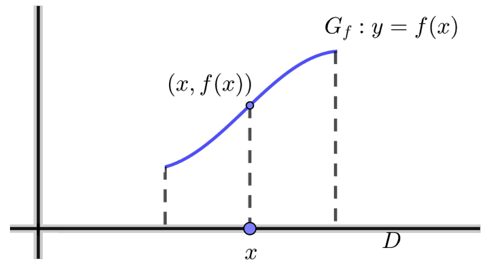


Figure 9: Gráfico de uma função real de uma variável real

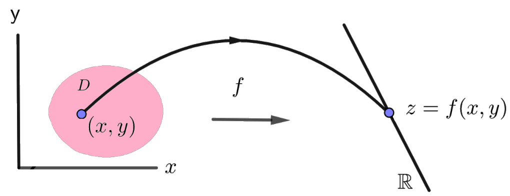


Figure 10: Domínio e imagem de uma função real de duas variáveis reais

(II) Se $n = 2 \Longrightarrow f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \in D \longmapsto z = f(x, y) \in \mathbb{R}$, é uma função real de duas variáveis.

Temos que:

(i) D=domínio da função

(ii) $Im(f) = f(D) = \{z = f(x, y) \in \mathbb{R}; (x, y) \in D\} \subset \mathbb{R}$

(iii) $G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = f(x, y), (x, y) \in D\} \subset \mathbb{R}^3$

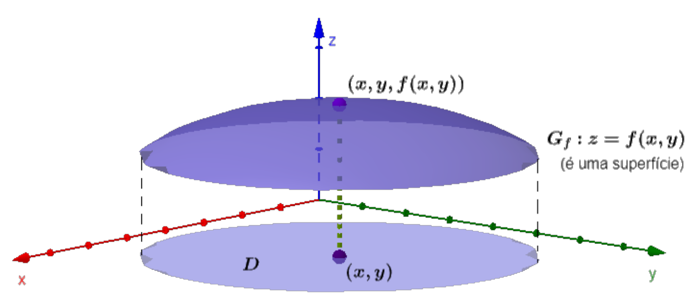


Figure 11: Gráfico de uma função real de duas variáveis reais

Atenção: Nem toda superfície do $\mathbb{R}^3$ é gráfico de alguma função $f(x, y)$. Com efeito, seja $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (esfera de raio 1 e centro (0,0,0)).

Dado (x,y) no interior do disco $D : x^2 + y^2 \leq 1$, temos que a reta paralela ao eixo z, passando por (x,y), intercepta S em dois pontos distintos. Logo, S não pode ser gráfico de uma função de x e y.

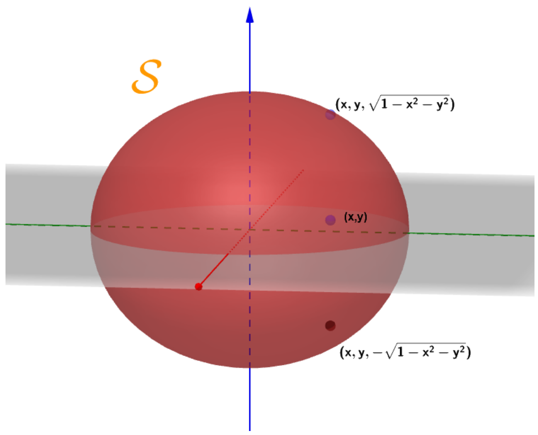


Figure 12: Superfície em $\mathbb{R}^3$ que não é gráfico de uma função

(III) Se $n = 3 \Longrightarrow f : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \in D \longmapsto w = f(x, y, z) \in \mathbb{R}$ é uma função real de três variáveis.

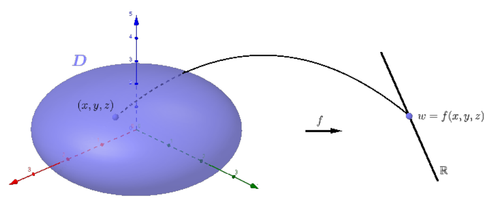


Figure 13: Domínio e imagem de uma função real de três variáveis reais

Temos que:

(i) $D =$ domínio da função

(ii) $Im(f) = f(D) = \{w = f(x, y, z) \in \mathbb{R}; (x, y, z) \in D\} \subset \mathbb{R}^4$

(iii) $G_f = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4; w = f(x, y, z), (x, y, z) \in D\} \subset \mathbb{R}^4$

Atenção: Como $G_f \subset \mathbb{R}^4$, é impossível desenhá-lo.

Exemplos

1. Função Constante: Seja $f(x, y) = c,\ c \in \mathbb{R}$.

   Temos $D_f = \mathbb{R}^2$, $Im(f) = \{c\}$, $G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = c,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

2. Função polinomial: Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$. Calcule,

   (a) $f(-1, 2)$ (b) $f(a, +b, a - b)$ (c) D_f (d) $Im(f)$ (e) G_f

   Solução

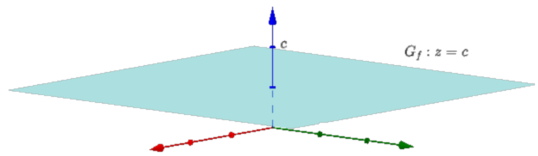


Figure 14: Gráfico da função constante

(a) $f(-1,2) = (-1)^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$

(b) $f(a+b, a-b) = (a+b)^2 + (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 = 2a^2 + 2b^2$

(c) $D_f = \mathbb{R}^2$

(d) $Im_f = [0, +\infty[$

(e) $G_f : z = f(x,y) \Longrightarrow G_f : z = x^2 + y^2$ (paraboloide circular)
Impondo $x = 0$, obtemos $z = x^2$, de forma que no plano yz a interseção do G_f é uma parábola. Se tomarmos $z = k$ $(k > 0)$ obteremos $x^2 + y^2 = k$. Isto significa que os traços ou cortes horizontais são circunferências.
Assim, o esboço do G_f é:

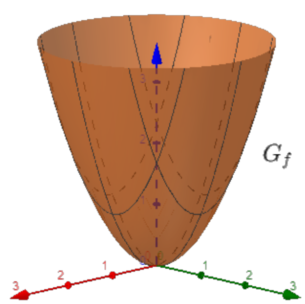


Figure 15: Gráfico da função $f(x, y) = x^2 + y^2$

3. Seja $f(x,y) = \sqrt{y-x} + \sqrt{1-y}$. Esboce o domínio da função.

Solução
A função f está bem definida se os radicandos $y - x$ e $1 - y$ não forem negativos, isto é: $y - x \geqslant 0$ e $1 - y \geqslant 0 \Longleftrightarrow y \geqslant x$ e $y \leqslant 1$ Portanto, o domínio de f é dado por onde: $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geqslant x\}$ e $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \leqslant 1\}$.

Exercícios

1. Seja $f(x,y) = \ln(x + y - 1)$. Determine:
(a) $f(1,1)$ (b) $f(e,1)$ (c) o domínio de f (d) a imagem de f

2. Seja $f(x,y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$. Determine:

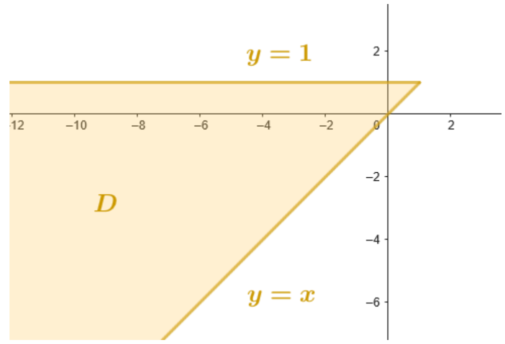


Figure 16: Domínio da função $f(x, y) = \sqrt{y - x} + \sqrt{1 - y}$

(a) o domínio de f

(b) a imagem de f

(c) o gráfico de f.

3. Seja $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}}$. Determine:

   (a) $f(1, 3, -4)$

   (b) o domínio de f

   (c) a imagem de f.

4. Determine e faca o esboço do domínio das função

   (a) $f(x, y) = \frac{5\ln(x+y)}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$

   (b) $f(x, y, z) = \ln(16 - 4x^2 - 4y^2 - z^2)$

5. Esboce o gráfico da função

   (a) $f(x, y) = 2$

   (b) $f(x, y) = 1 - x - y$

   (c) $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$

   (d) $f(x, y) = 1 - x^2$

   (e) $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - 16y^2}$

   (f) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

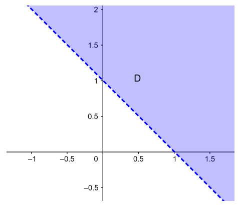
   (g) $f(x, y) = y^2 - x^2$

   (h) $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$

Respostas

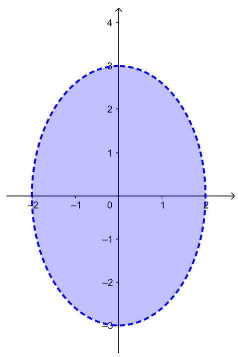
1. (a) 0 (b) 1

(c) $\{(x,y); x+y>1\}$



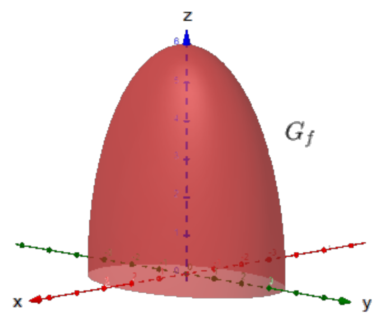
(d) $\mathbb{R}$

2. (a) $\left\{(x,y); \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leqslant 1\right\}$



(b) $[0,6]$

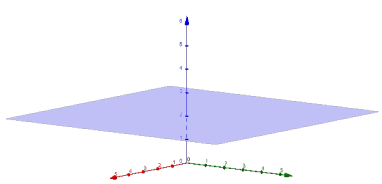
(c) $G_f : \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{36}=1, z\geqslant 0$



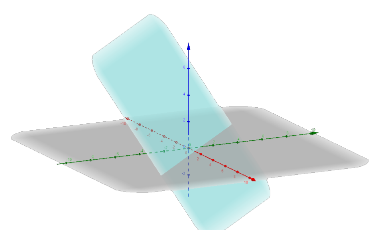
3. (a) $\frac{1}{5}$
   (b) $\{(x,y,z); x^2+y^2+z^2>1\}$
   (c) $]0,+\infty[$

4. (a) $(x,y); x^2+y^2<4ey>-x$
   (b) $(x,y,z); \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}<1$

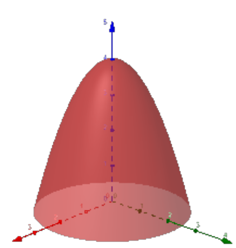
5. (a) $G_f : z=2$ (plano horizontal)



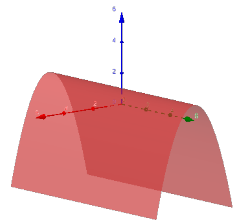
(b) $x+y+z=1$ (plano)



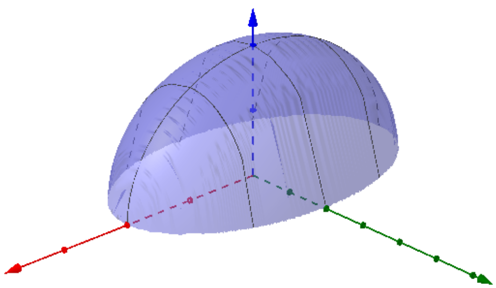
(c) $z=4-x^2-y^2$ (paraboloide)



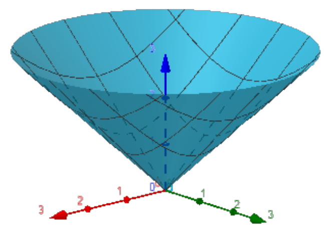
(d) $G_f : z = 1 - x^2$ (cilindro parabólico)



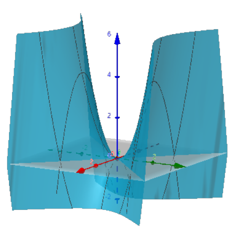
(e) $G_f : \frac{x^2}{16} + y^2 + \frac{z^2}{16} = 1, z \geq 0$



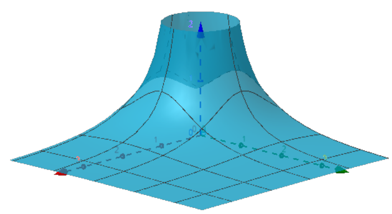
(f) $G_f : z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (parte superior do cone)



(g) $G_f : z = y^2 - x^2$ (paraboloide hiperbólico)



(h) $G_f : z = \frac{1}{x^2+y^2}$



Curvas de nível

Objetivos:

- Compreender a noção de curvas de nível e sua relação com o domínio, imagem e gráfico da função;
- Calcular e identificar a curva de nível que passa por um dado ponto.
- Esboçar curvas de nível; Mapa de contorno.

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \in D \longmapsto z = f(x, y) \in \mathbb{R}$

Seja $k \in Im(f)$, o conjunto $C_k = \{(x, y) \in D; \quad f(x, y) = k\} \subset D \subset \mathbb{R}^2$ é dito curva de nível de f no nível k.

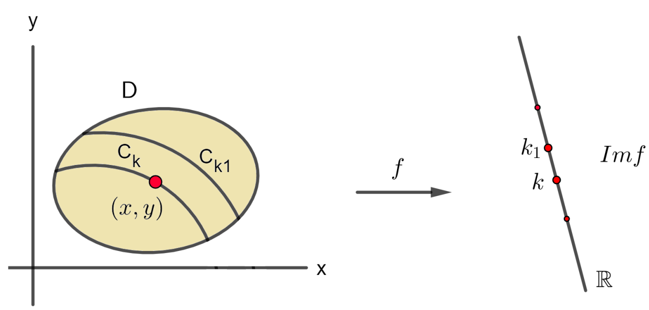


Figure 17: Relação da curva de nível com o domínio e a imagem da função

Observe que a curva $f(C_k)$ (imagem da curva de nível C_k pela função $f(x, y)$) é a curva interseção do gráfico da função f com o plano $z = k$.

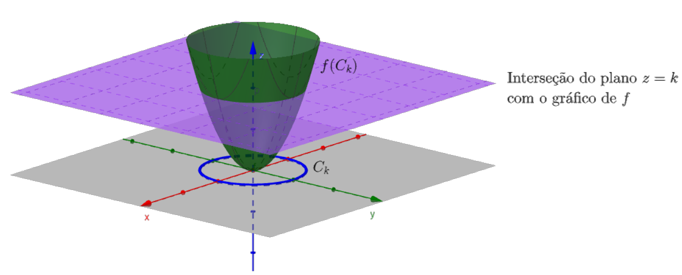


Figure 18: Relação da curva de nível com o gráfico da função

Observações:

(I) $C_k \subset D \subset \mathbb{R}^2$, $\quad f(C_k) \subset G_f \subset \mathbb{R}^3$

(II) Se $f(x,y)$ é a temperatura no ponto (x,y), então C_k é uma isoterma (pontos de mesma temperatura)

(III) Se f é energia potencial, então C_k é uma curva equipotencial.

Exemplos

1. Seja $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$. Determine:

   (a) D_f

   (b) $Im(f)$

   (c) G_f

   (d) curvas de nível C_k.

   Solução

   (a) $D_f = \mathbb{R}^2$

   (b) $Im(f) =]-\infty, 1]$

   (c) $G_f : z = 1 - x^2 - y^2$. Vamos utilizar traços para esboçar G_f. Impondo $x = 0$, obtemos $z = 1 - y^2$, de modo que a interseção do G_f com plano yz $(x = 0)$ é uma parábola. Impondo $z = 0$, obtemos o traço $x^2 + y^2 = 1$, que corresponde a uma circunferência no plano xy. Assim, temos a forma da superfície que é chamada de paraboloide.

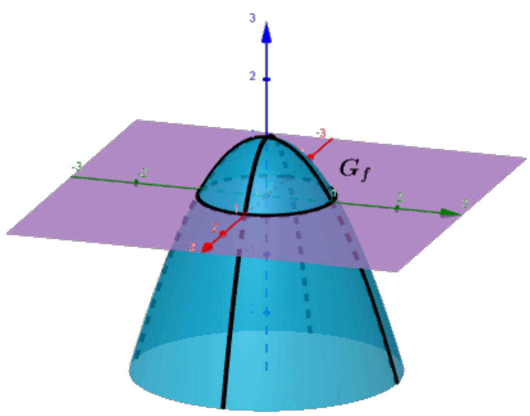


Figure 19: Gráfico da função $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$

   (d) Seja $k \in Im(f) =]-\infty, 1]$. Então, a curva de nível C_k é dada por

$$C_k : 1 - x^2 - y^2 = k \Longrightarrow C_k : x^2 + y^2 = 1 - k$$

   Para $k = 1$, temos $C_1 : x^2 + y^2 = 0 \Longrightarrow x = 0, y = 0$. Logo, $C_1 = \{(0,0)\}$.

Para $k < 1$, donde $1 - k > 0$, temos $C_k : x^2 + y^2 = (\sqrt{1-k})^2$. Assim, as curvas de nível (k<1) são circunferências concêntricas de centro na origem e raio $\sqrt{1-k}$.

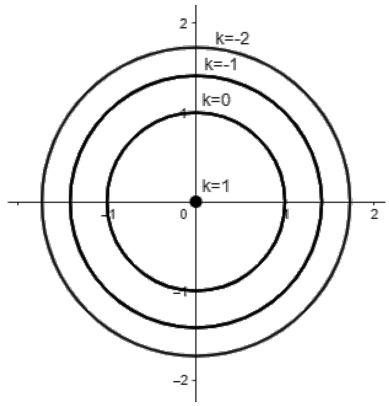


Figure 20: Curvas de nível da função $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$

2. Seja $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Determine:

   (a) D_f

   (b) $Im(f)$

   (c) G_f

   (d) curvas de nível C_k.

   Solução

   (a) $D_f : 1 - x^2 - y^2 \geqslant 0 \Longrightarrow D_f : x^2 + y^2 \leqslant 1$ (disco de centro em $(0, 0)$ e raio 1)

   (b) $Im(f) = [0, 1]$

   (c) $G_f : z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \Rightarrow G_f : z^2 = 1 - x^2 - y^2, z \geqslant 0 \Longrightarrow G_f : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geqslant 0$ (hemisfério superior de centro em $(0, 0, 0)$ e raio 1)

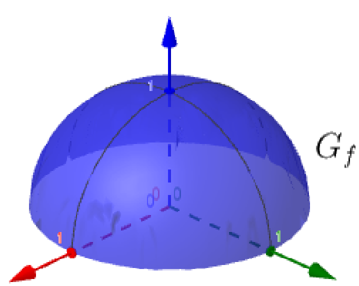


Figure 21: Gráfico da função $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

   (d) Seja $k \in Imf = [0, 1]$. A curva de nível correspondente a $z = k$ é

$$C_k : f(x, y) = k \quad \text{ou} \quad \sqrt{1 - x^2 - y^2} = k \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = 1 - k^2$$

Para $k = 0$, temos $C_0 : x^2 + y^2 = 1$.

Para $k = 1$, temos $C_1 : x^2 + y^2 = 0$, então $C_1 = \{(0, 0)\}$.

Para k, tal que $0 < k < 1$, temos circunferência concêntricas de centro na origem e raio $\sqrt{1 - k^2}$.

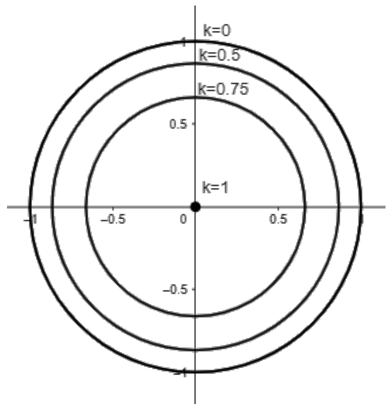


Figure 22: Curvas de nível da função $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Observação: $f(x, y) = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \Rightarrow G_f : z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Portanto, $G_f : x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \leqslant 0$ (hemisfério inferior de centro na origem e raio 1).

3. Seja $z = f(x, y) = 1 - x^2$. Determine:

   (a) D_f

   (b) $Im(f)$

   (c) G_f

   (d) curvas de nível C_k.

Solução

(a) $D_f = \mathbb{R}^2$

(b) $Im(f) =]-\infty, 1]$

(c) $G_f : z = 1 - x^2$. Observe que a equação do gráfico, $z = 1 - x^2$, não envolve a variável y. Portanto, qualquer plano vertical $y = k$ (paralelo ao plano xz) intercepta o G_f segundo uma parábola de equação $z = 1 - x^2$. Assim, G_f é obtido tomando a parábola $z = 1 - x^2$ no plano xz e movendo-a na direção do eixo y. A superfície é dita cilindro parabólico.

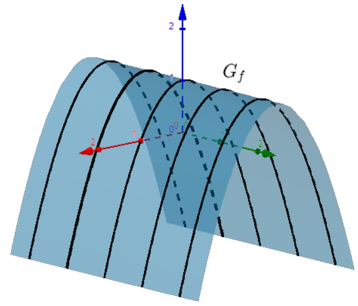


Figure 23: Gráfico da função $f(x, y) = 1 - x^2$

(d) Seja $k \in Im(f) =]-\infty, 1]$. A curva de nível correspondente é

$$C_k : 1 - x^2 = k \Longrightarrow C_k : x^2 = 1 - k > 0 \Longrightarrow C_k : x = \pm\sqrt{1-k}$$

Se $k = 1$, temos $C_1 : x = 0$ (eixo y);
Se $k < 1$, temos $C_k =$ reta $x = \sqrt{1-k}$ ou reta $x = -\sqrt{1-k}$

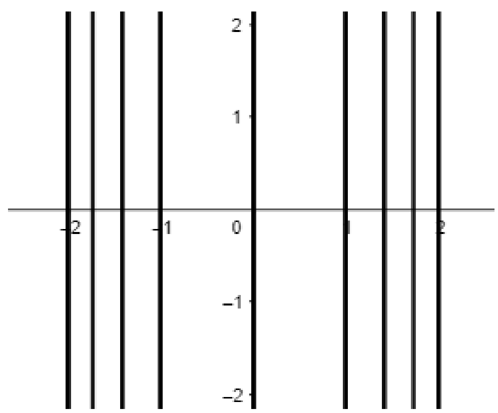


Figure 24: Curvas de nível da função $f(x, y) = 1 - x^2$

Observação: $f(x, y) = x^2, g(x, y) = a^2 - y^2 \Longrightarrow$ G$_f$ e G_g são cilindros parabólicos.

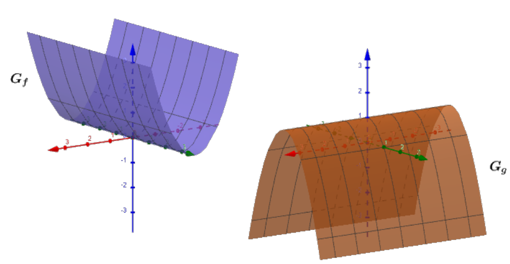


Figure 25: Cilindros parabólicos

4. Seja $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Determine:

(a) D_f

(b) $Im(f)$

(c) G_f

(d) curvas de nível C_k.

Solução

(a) $D_f = \mathbb{R}^2$

(b) $Im(f) = [0, +\infty[$

(c) $G_f : z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Fazendo $x = 0$, temos $z =\mid y \mid$, que é a curva interseção do G_f com plano yz. Fazendo $z = c$, $c > 0)$, temos $x^2 + y^2 = c^2$, de modo que a interseção do G_f com o plano horizontal $z = c$ é uma circunferência. Assim, temos que G_f é a parte superior do cone.

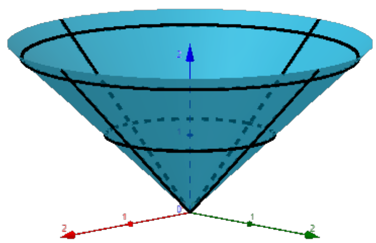


Figure 26: Gráfico da função $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(d) Seja $k \in Im(f) = [0, +\infty[$. Então, a curva de nível correspondente é dada por $C_k : \sqrt{x^2 + y^2} = k$ ou $x^2 + y^2 = k^2$.

Se $k = 0$, temos $C_0 = \{(0, 0)\}$.

Se $k > 0$ temos circunferências concêntricas na origem e raio k.

<u>Observações:</u>

(i) Os gráficos de $f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$,$f(x, y) = a - \sqrt{x^2 + y^2}$, $f(x, y) = \sqrt{3(x^2 + y^2}$, $f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$ são partes de cones circulares.

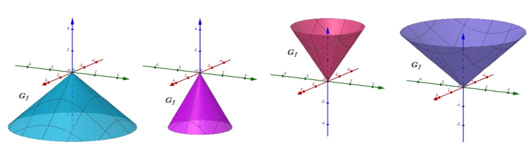


Figure 27: Cones circulares

(ii) O gráfico de $f(x, y) = \sqrt{ax^2 + by^2}, a > 0, b > 0, a \neq b \Longrightarrow G_f$ é a parte superior do cone elíptico.

5. Seja, $z = f(x, y) = y^2 - x^2$. Determine:

(a) D_f

(b) $Im(f)$

(c) G_f

(d) curvas de nível C_k.

Solução

(a) $D_f = \mathbb{R}^2$

(b) $Im(f) = \mathbb{R}^2$

(c) $G_f : z = y^2 - x^2$. Fazendo $x = 0$, o traço no plano yz é a parábola $z = y^2$ com concavidade para cima. Os traços verticais $y = k$ são parábolas $z = k^2 - x^2$ com concavidade para baixo. Os traços horizontais $z = k, \quad k > 0$, são hipérboles $y^2 - x^2 = k$ e os tracos horizontais $z = -k, k > 0$, são hipérboles $x^2 - y^2 = k_0$. Assim, temos o esboço do G_f, dito paraboloide hiperbólico (que tem a forma de uma sela).

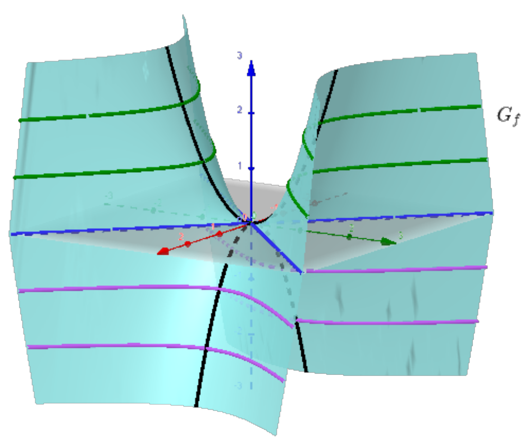


Figure 28: Gráfico da função $f(x, y) = y^2 - x^2$

(d) Seja $k \in Im(f) = \mathbb{R}$. A curva de nível correspondente é dada por

$$C_k : y^2 - x^2 = k$$

Se $k > 0$, temos hipérboles com vértices $(0, \pm\sqrt{k})$.
Se $k = 0$, temos duas retas pela origem, $y = x$ e $y = -x$.
Se $k < 0$, temos hipérboles com vértices $(\pm\sqrt{-k}, 0)$.

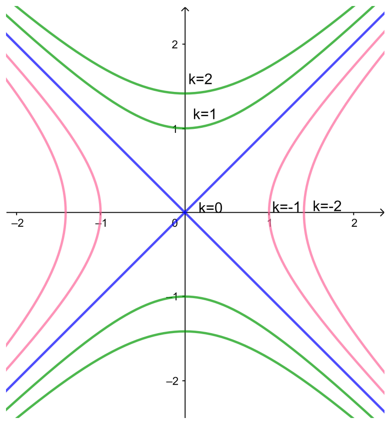


Figure 29: Curvas de nível da função $f(x, y) = y^2 - x^2$

6. Seja, $z = f(x, y) = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Determine:

   (a) A curva de nível que passa pelo ponto $(0, \sqrt{3})$.

   (b) A reta tangente à curva de nível do item (a) no ponto $(1, \sqrt{2})$. Identifique o vetor velocidade.

   (c) Esboce em um único gráfico a curva, a reta tangente e a direção do vetor velocidade.

Solução

(a) Como $f(0, \sqrt{3}) = -1$, então a curva de nível é $-\sqrt{4 - x^2 - y^2} = -1$, isto é, $C_{-1} : x^2 + y^2 = 3$.

(b) Observe que $f(1, \sqrt{2}) = -1$. portanto $(1, \sqrt{2}) \in C_{-1}$ e faz sentido calcular a reta tangente a C_{-1} nesse ponto. Caso contrário não existiria.

Uma parametrização de C_{-1} é $\gamma : \begin{cases} x(t) = \sqrt{3}\cos t \\ y(t) = \sqrt{3}\,\text{sen}\, t \end{cases}$, $\forall t \in [0, 2\pi]$.

Portanto, a equação paramétrica da reta seria $\gamma(s_0) + \gamma'(s_0)t$, $\forall t \in \mathbb{R}$, onde s_0 é tal que $\gamma(s_0) = (1, \sqrt{2})$.

Calculando s_0 $\begin{cases} \sqrt{3}\cos s_0 = 1 \\ \sqrt{3}\,\text{sen}\, s_0 = \sqrt{2} \end{cases}$ e substituindo na derivada da parametrização, $\gamma' : \begin{cases} x'(t) = -\sqrt{3}\,\text{sen}\, t \\ y'(t) = \sqrt{3}\cos t \end{cases}$, temos que $\gamma'(s_0) = (-\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \sqrt{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}})$.

Daí, a equação paramétrica da reta tangente é: $(1, \sqrt{2}) + (-\sqrt{2}, 1)t$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

O vetor velocidade é $\gamma'(s_0) = (-\sqrt{2}, 1)$. A direção dele é $\vec{v} = \frac{\gamma'(s_0)}{||\gamma'(s_0)||} = (-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

(c)

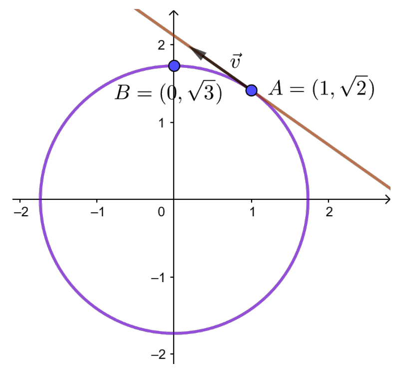


Figure 30: Curvas de nível da função $f(x, y) = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$ que passa pelo ponto $(0, \sqrt{3})$ (em roxo)

Exercícios

1. Seja $z = f(x, y) = \sqrt{2y - x^2 - y^2}$. Determine:
   (a) D_f
   (b) $Im(f)$
   (c) G_f
   (d) curvas de nível C_k.
2. Seja $z = f(x, y) = 1 - x^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0$ e $x + y \leqslant 1$. Determine:
   (a) D_f
   (b) $Im(f)$
   (c) G_f
   (d) curvas de nível C_k.
3. Seja a função $z = f(x, y) = \frac{y}{x-2}$. Determine:
   (a) D_f
   (b) $Im(f)$
   (c) curvas de nível C_k.
4. Seja a funcõo $z = f(x, y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$. Determine:
   (a) D_f
   (b) $Im(f)$
   (c) curvas de nível C_k.
5. Suponha que $T(x, y) = 4x^2 + 9y^2$ (em C°) represente uma distribuição de temperatura no plano xy. Desenhe a isoterma correspondente à temperatura de $36°$C.

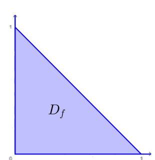
6. Uma chapa plana de metal está situada em um plano xy, de modo que a temperatura (em $^\circ$) no ponto (x, y) é inversamente proporcional a distância da origem.
   (a) Descreva as isotermas (conjunto de pontos com mesma temperatura).
   (b) Se a temperatura no ponto $P(4, 3)$ é $40°$C, ache a equação da isoterma para uma temperatura de $20°$C.
   (c) curvas de nível C_k.

7. Seja, $z = f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2y}$.
   (a) Esboce o mapa de contorno de f.
   (b) Determine uma equação da reta tangente à curva de nível que passa pelo ponto $(0, 6)$ no ponto $(-3, 3)$. Identifique o vetor velocidade.
   (c) Identifique a curva de nível do item (b) no mapa de contorno do item (a). Esboce a reta tangente e a direção do vetor velocidade no mapa de contorno.

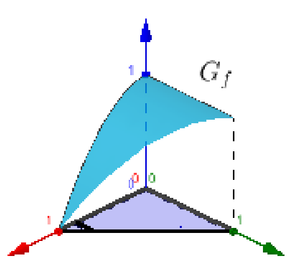
Respostas

1. (a) $D_f = \{(x, y); x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$
   (b) $Im(f) = [0, 1]$
   (c) $G_f : x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1, 0 \leqslant z \leqslant 1$, semi-esfera.
   (d) $C_0 : x^2 + (y - 1)^2 = 1$, $C_1 = \{(0, 1)\}$. Se $0 < k < 1$, temos circunferências concêntricas de centro $(0, 1)$ e raio $\sqrt{1 - k^2}$.

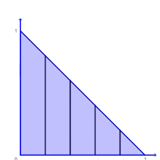
2. (a) D_f :



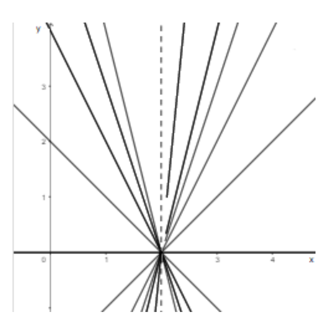
   (b) $Im(f) = [0, 1]$
   (c) G_f :



   (d) C_k :



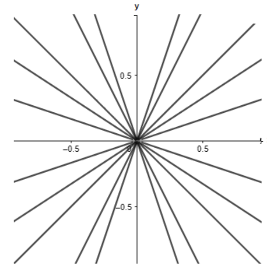
3. (a) $D_f = \{(x, y); x \neq 2\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{$ reta $x = 2\}$
   (b) $Im(f) = \mathbb{R}$
   (c) $C_k : y = k(x - 2), x \neq 2$.



4. (a) $D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

   (b) $Im(f) = [0,1]$

   (c) $C_0 : x = 0, y \neq 0$; $C_1 : y = 0, x \neq 0$; $C_k : y = \pm\sqrt{\frac{1-k}{k}}x$, $x \neq 0$, $0 < k < 1$.

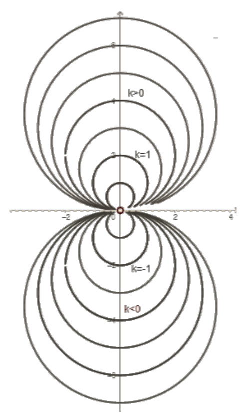


5. $c_{36} : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

6. (a) Circunferências com centro em $(0,0)$

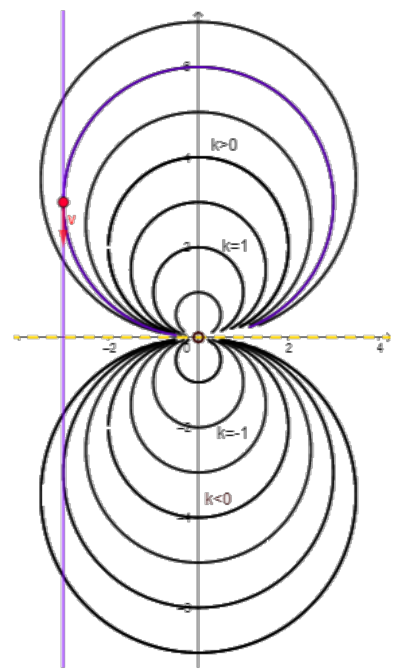
   (b) $x^2 + y^2 = 100$

7. (a)



   (b) Reta tangente a C_3 em $(-3,3)$ é $(-3,3) + (0,-3)t$, $\forall t \in \mathbb{R}$.A direção do vetor velocidade é $\vec{v} = (0,-1)$

   (c)



Superfícies de nível

Objetivos:

- Compreender a noção de superfícies de nível e sua relação com o domínio e imagem da função.
- Calcular e identificar a superfície de nível que passa por um dado ponto.
- Esboçar as superfícies de nível.

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2, ..., x_n) \in D \quad \longmapsto w = f(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}$.

Seja $k \in Im(f)$. O conjunto $\mathcal{C}_k = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in D; f(x_1, x_2, ..., x_n) = k\} \subset D \subset \mathbb{R}^n$ é dito conjunto de nível de f no nível k. As curvas de nível são o caso particular $n = 2$.

Quando $n = 3$, os conjuntos de nível se denotam por S_k e se chamam superfície de nível de f no nível k.

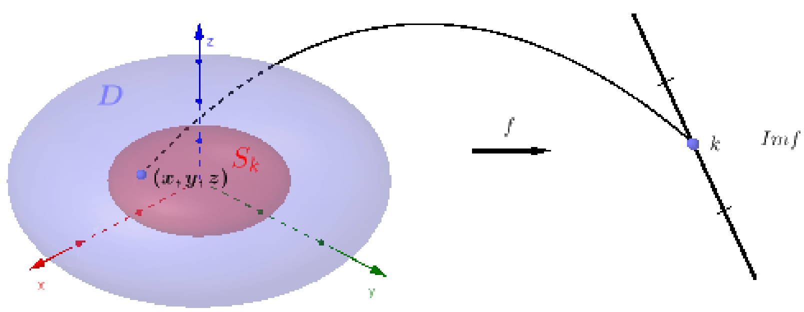


Figure 31: Relação da superfície de nível com o domínio e a imagem da função

Observação

(I) Se $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, então $G_f \subset \mathbb{R}^3$, $C_k \subset D \subset \mathbb{R}^2$, $Im(f) \subset \mathbb{R}$.

(II) Se $f : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, então $G_f \subset \mathbb{R}^4$, $S_k \subset D \subset \mathbb{R}^3$, $Im(f) \subset \mathbb{R}$.

(II) Se $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, então $G_f \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathcal{C}_k \subset D \subset \mathbb{R}^n$, $Im(f) \subset \mathbb{R}$.

Exemplos

1. Seja $f(x, y, z) = x^2 + y^2$. Determine:

   (a) D_f

   (b) $Im(f)$

   (c) a superfície de nível que passa pelo ponto $(1, 0, 0)$

   Solução

   (a) $D_f = \mathbb{R}^3$

   (b) $Im(f) = [0, +\infty[$

   (c) $f(1, 0, 0) = 1$, então o nível da curva é $k = 1$. Daí, $S_1 : x^2 + y^2 = 1$ é a curva desejada. Como essa equação não envolve a variável z, isso significa que qualquer plano horizontal $z = k$ (paralelo ao plano xy) intercepta o G_f segundo a circunferência $x^2 + y^2 = 1$. Assim, o G_f é obtido tomando-se a circunferência $x^2 + y^2 = 1$, no plano xy e deslocando-a paralelamente ao eixo z. A superfície é dita cilindro circular reto.

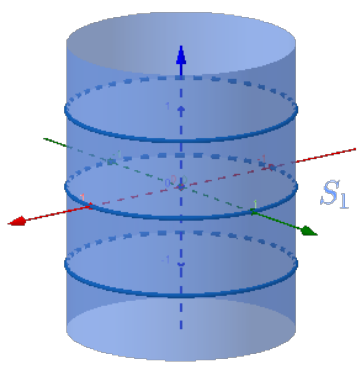


Figure 32: Superfície de nível $k = 1$ da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2$

2. Seja $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Determine:

   (a) D_f

   (b) $Im(f)$

   (c) S_k, superfícies de nível

   Solução

   (a) $D_f = \mathbb{R}^3$

   (b) $Im(f) = \mathbb{R}$

   (c) Seja $k \in Im(f) = \mathbb{R}$. Então, a superfície de nível correspondente é

$$S_k : x^2 + y^2 - z^2 = k$$

Se $k = 0$, temos $S_0 : x^2 + y^2 - z^2 = 0$ ou $z^2 = x^2 + y^2$. Fazendo $x = 0$, temos $z = \pm|y|$ e fazendo $z = c$, temos $x^2 + y^2 = c^2$. Logo, temos a forma de S_0 que é um cone.

Se $k > 0$, temos $S_k : x^2 + y^2 - z^2 = k$. Fazendo $x = 0$, temos a hipérbole $y^2 - z^2 = k$ no plano yz de vértices $(0, \sqrt{k}, 0)$ e $(0, -\sqrt{k}, 0)$. Fazendo $z = c$, temos a circunferência $x^2 + y^2 = k + c^2$. Assim, temos a superfície S_k, $k > 0$, dita hiperboloide de uma folhas.

Se $k < 0$ ou $-k > 0$, temos $S_k : z^2 \to x^2 - y^2 = -k$. Fazendo $x = 0$, temos a hipérbole $z^2 - y^2 = -k$ no plano yz de vértices $(0, 0, \sqrt{-k})$, $(0, 0, -\sqrt{-k})$. Fazendo $z = c$, com $c > \sqrt{-k}$ ou $c < \sqrt{-k}$, temos circunferências $x^2 + y^2 = k + c^2$. Assim, temos a superfície $S_k, k < 0$, dita hiperboloide de duas folhas.

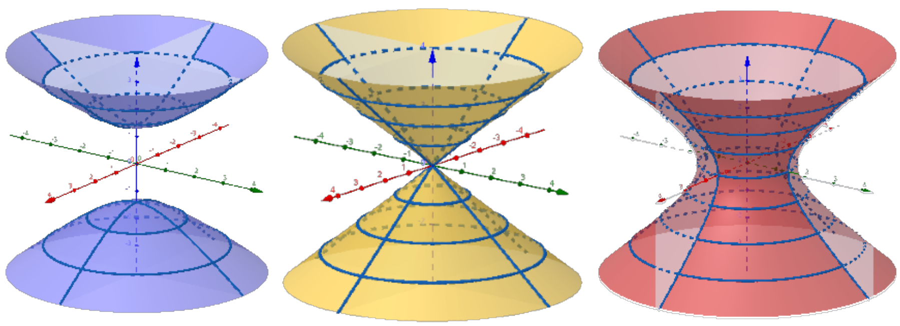


Figure 33: Superfície de nível $k < 0$ (azul), $k = 0$ (amarelo) e $k > 0$ (vermelho) da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$

A versão do mapa de contorno para as superfícies de nível seria um gráfico 3D com as superfícies de nível uma dentro da outra:

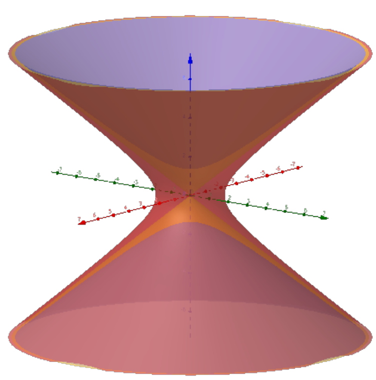


Figure 34: Gráfico 3D com as superfícies de nível da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$

Exercícios

1. Seja $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$. Determine:

(a) D_f

(b) $Im(f)$

(c) superfícies de nível

2. A temperatura em uma região D do $\mathbb{R}^3$ é dada por $T(x,y,z) = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2 - z^2}$ Determine:

   (a) a região D

   (b) ImT

   (c) o conjunto de pontos que possuem a mesma temperatura do que o ponto $(0, 1, \sqrt{2})$

   (d) as isotermas

3. Se a voltagem V no ponto $P(x,y,z)$ é dada por

$$V = \frac{6}{(x^2 + 4y^2 + 9z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

   Determine:

   (a) domínio de V

   (b) ImV

   (c) as equipotenciais

Respostas

1. (a) $D_f : x^2 + y^2 + z^2 > 1$

   (b) $Im(f) = \mathbb{R}$

   (c) $S_k : x^2 + y^2 + z^2 = 1 + e^k, \quad k \in \mathbb{R}$, esferas concêntricas de raio $\sqrt{1 + e^k}$ e centro na origem.

2. (a) $D = \left\{(x,y,z); \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{36} \leqslant 1\right\}$

   (b) $ImT = [0, 6]$

   (c) $S_5 : 4x^2 + 9y^2 + z^2 = 11$

   (d) $S_0 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{36} = 1, \quad S_6 = \{(0,0,0)\}, \quad S_k : 4x^2 + 9y^2 + z^2 = 36 - k^2$, $0 < k < 6$, elipsoides concêntricos de centro na origem.

3. (a) $D_V = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$

   (b) $ImV =]0, +\infty[$

   (c) $S_k : x^2 + 4y^2 + 9z^2 = \frac{36}{k^2}$, $k > 0$, elipsoides concêntricos de centro na origem.

Topologia em $\mathbb{R}^n$

Objetivos:

- Compreender a noção de bola aberta; identificar conjuntos abertos, fechados, limitados e compactos.
- Identificar se um conjunto é aberto ou fechado a partir do conjunto fronteira.
- Compreender a definição de pontos fronteira e pontos de acumulação.

Definição 1: A bola aberta de centro $P \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$ é o conjunto dos pontos $X \in \mathbb{R}^n$ cuja distância ao ponto P é menor do que r. Indicaremos por $B_r(P)$. Assim,

$$B_r(P) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - P\| < r\}$$

Quando $n = 1$, a bola aberta $B_r(P)$ de centro P e raio r na reta é o intervalo aberto $]P - r, P + r[$.

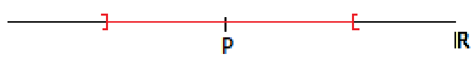


Figure 35: Bola de centro P e raio $r > 0$ em $\mathbb{R}$

Quando $n = 2$, a bola aberta $B_r(P)$ de centro P e raio r no plano $\mathbb{R}^2$ é o disco aberto. Se $P = (a, b)$, então

$$B_r(a,b) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \|(x,y) - (a,b)\| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r\right\}$$

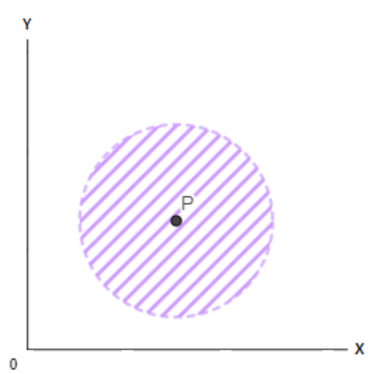


Figure 36: Bola de centro P e raio $r > 0$ em $\mathbb{R}^2$

Quando $n = 3$, a bola aberta $B_r(P)$ de centro $P = (a, b, c)$ e raio r no espaço $\mathbb{R}^3$ é a esfera aberta

$$B_r(a,b,c) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \quad \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} < r\right\}$$

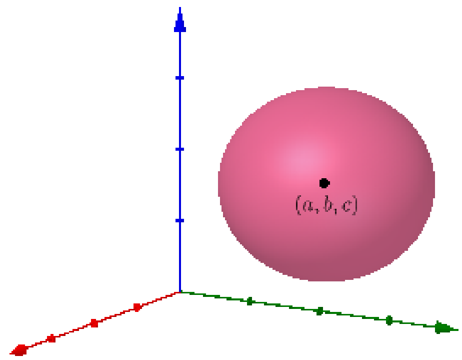


Figure 37: Bola de centro P e raio $r > 0$ em $\mathbb{R}^3$

Definição 2: Seja $D \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que D é um conjunto aberto, se dado $P \in D$ existir uma bola aberta $B_r(P) \subset D$.

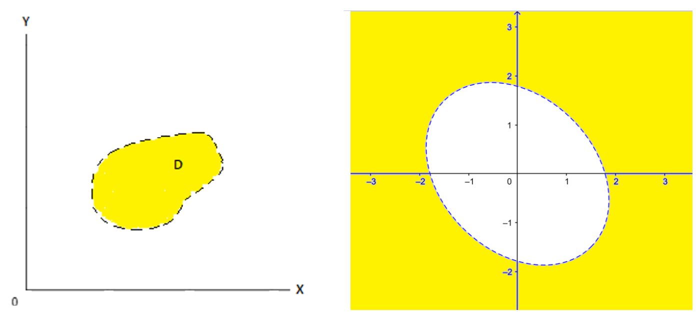


Figure 38: Conjuntos abertos em $\mathbb{R}^2$

Os conjuntos $\emptyset$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ e todas as bolas abertas são conjuntos abertos.

Definição 3: Seja $F \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que F é um conjunto fechado, se o complementar dele $D = \mathbb{R}^n \setminus F$ for aberto.

Observação:

(I) Os conjuntos

$$\overline{B_r(P)} = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - p\| \leq r\}$$

são fechados. Eles são chamados de bolas fechadas.

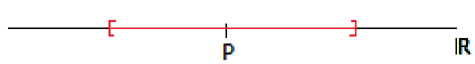


Figure 39: Bola fechada em $\mathbb{R}$

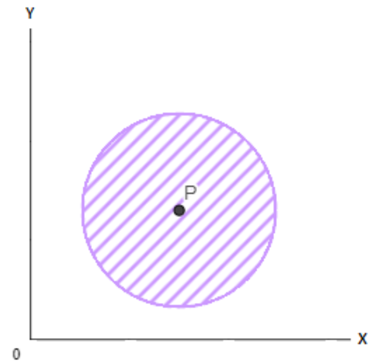


Figure 40: Bola fechada em $\mathbb{R}^2$

(II) Os únicos conjuntos em $\mathbb{R}^n$ abertos e fechados ao mesmo tempo são $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$.

Definição 4: Seja $D \subset \mathbb{R}^n$. Um ponto $P \in \mathbb{R}^n$ (pertencente ou não a D) se diz ponto de fronteira de D se toda bola $B_r(P)$ interseta a D e também a seu complementar $\mathbb{R}^n \setminus D$. O conjunto formado por todos os pontos fronteira de D é chamado conjunto fronteira de D e denotado por $Fr(D)$.

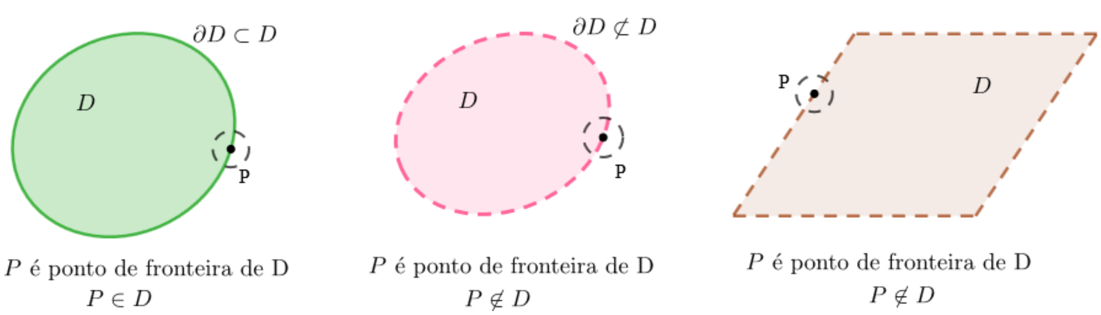


Figure 41: Pontos fronteira

Observação:

(I) Um conjunto é fechado se contem todos os pontos de sua fronteira. Por exemplo, as bolas fechadas.

(II) Se um conjunto contem pelo menos um ponto fronteira, então não é aberto. Por exemplo, o intervalo $]0, 1]$.

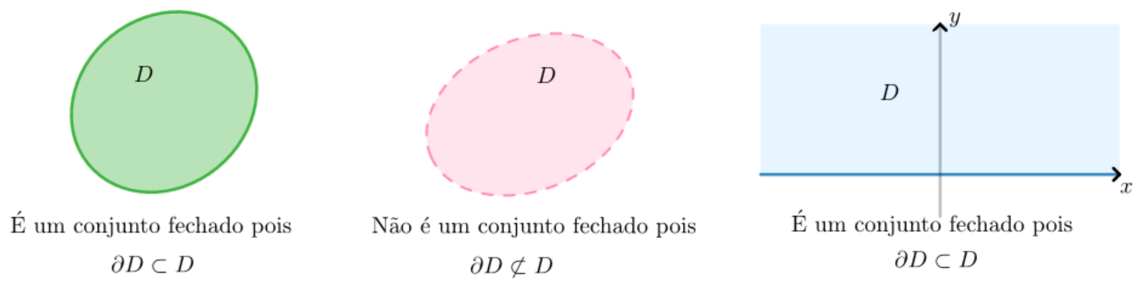


Figure 42: Conjuntos fechados

Definição 5: Seja $D \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que D é um conjunto limitado, se existir um raio $r > 0$ tal que $D \subset B_r(0)$.

Dizemos que D é não limitado se para qualquer $r > R_0$, existe algum ponto em D que não pertence a $B_r(0)$.

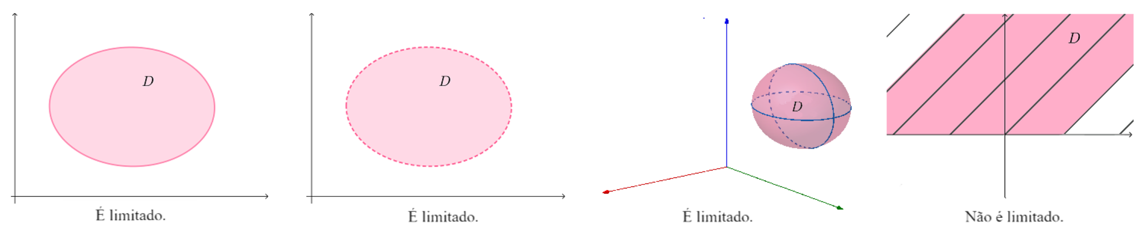


Figure 43: Conjuntos não limitados

Observação:

(I) D também seria limitado se existir um raio $r > 0$ tal que $D \subset \{(x_1, x_2, ...x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ |x_i| < r, \forall i = 1, ..., n\}$. Se $n = 2$, esse conjunto seria um quadrado de lado r.

(II) As bolas abertas e as bolas fechadas são conjuntos limitados.

(III) O conjunto da Figura 4 (esquerda) é limitado. Já o conjunto da Figura 4 (direita) é não limitado, pois para qualquer $r > 3$ sempre existirá um ponto $(0, r + 1)$ fora da bola $B_r(0)$.

Definição 6: Seja $D \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que D é um conjunto compacto se for fechado e limitado.

As bolas fechadas são compactas, as bolas abertas não o são.

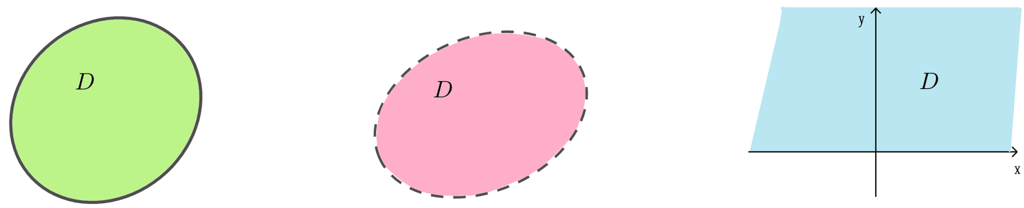


Figure 44: Conjuntos compactos (esquerda) e não compactos (centro e direita)

Definição 7: Seja $D \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que $P \in \mathbb{R}^n$ (pertencente ou não a D) é um ponto de acumulação de D (p.a.) se qualquer bola aberta centrada em P contém pelo menos um ponto $x \in D$, $x \neq P$.

Os extremos de um intervalo aberto em $\mathbb{R}$ são pontos de acumulação.

Exemplos

1. Os seguintes conjuntos são abertos:

   (a) interior e exterior de uma elipse

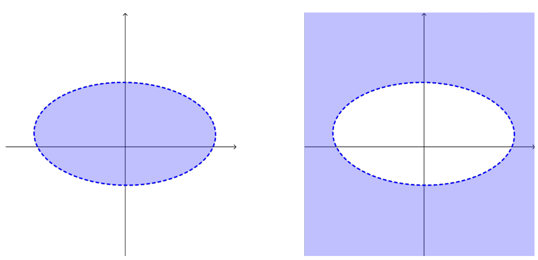


Figure 45: Interior (esquerda) e exterior (direita) de uma elipse

   (b) interior e exterior de um polígono

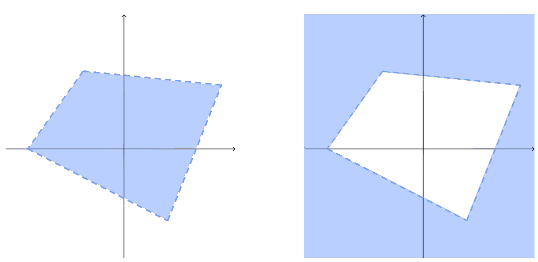


Figure 46: Interior (esquerda) e exterior (direita) de um polígono

   (c) conjuntos definidos algebricamente por uma desigualdade. Por exemplo, $x^2 - y^2 > 0$ ou $x^2 - y^2 < 0$.

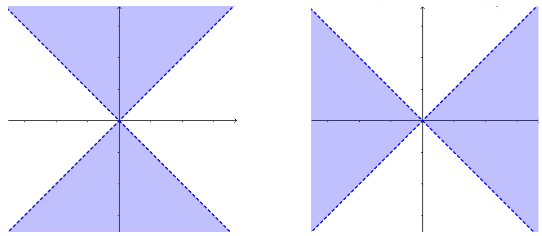


Figure 47: Conjunto dado por $x^2 - y^2 > 0$ (esquerda) e $x^2 - y^2 < 0$ (direita)

(d) O conjunto $B_r(a, b, c) \setminus \{(a, b, c)\}$

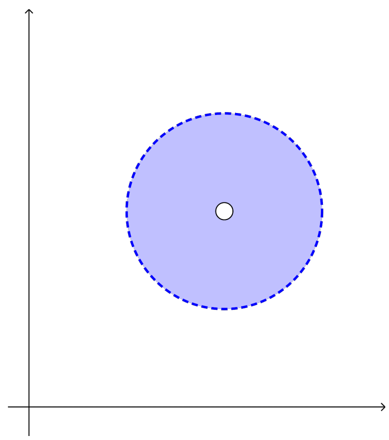


Figure 48: Bola furada em $\mathbb{R}^2$

2. Os seguintes conjuntos são fechados:

(a) uma elipse

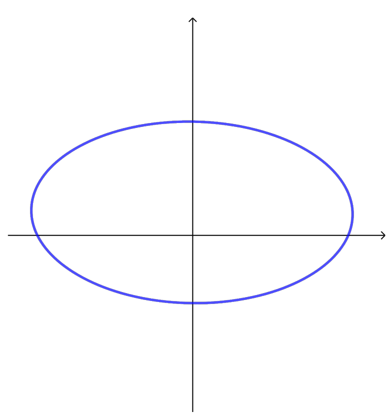


Figure 49: Elipse

(b) um polígono

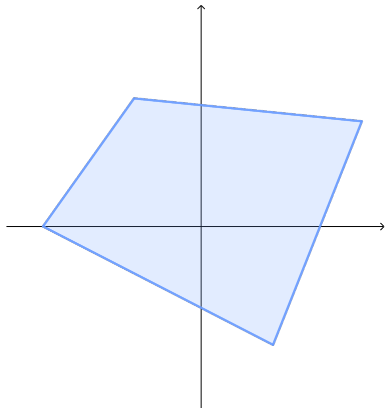


Figure 50: Polígono

(c) conjuntos definidos algebricamente por uma igualdade. Por exemplo, $x^2 - y^2 = 0$, $x^2 - y^2 \leq 0$, $x^2 - y^2 \geq 0$, $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$.

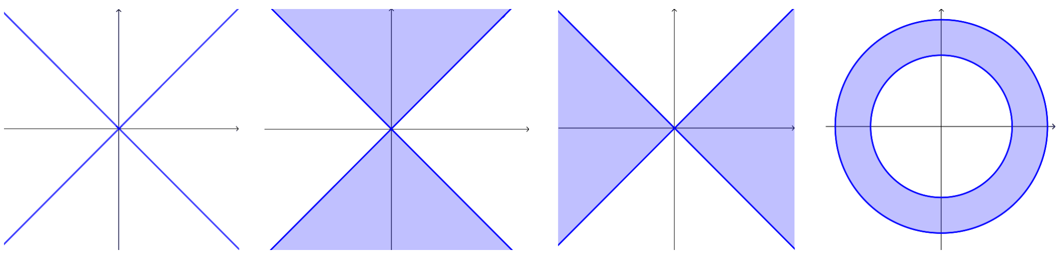


Figure 51: Conjuntos dados por $x^2 - y^2 = 0$, $x^2 - y^2 \leq 0$, $x^2 - y^2 \geq 0$, $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$ (respectivamente de esquerda a direita)

3. Os conjuntos definidos por uma igualdade e uma desigualdade. Por exemplo, $4 < x^2 + y^2 \leq 9$ não são nem abertos nem fechados.

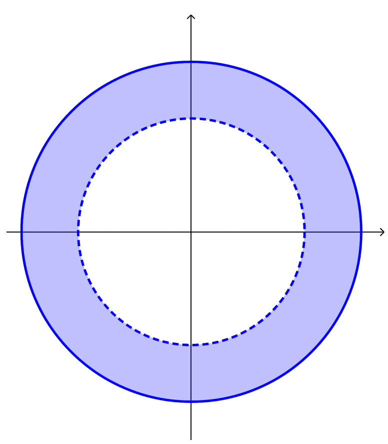


Figure 52: Conjuntos dados por $4 < x^2 + y^2 \leq 9$

4. (a) A fronteira de um intervalo (fechado, aberto, aberto por um lado e fechado por o outro) está formada pelos extremos: $Fr(]P-r, P+r[) = Fr([P-r, P+r]) = Fr(]P-r, P+r]) = Fr([P-r, P+r[) = \{P-r, P+r\}$.

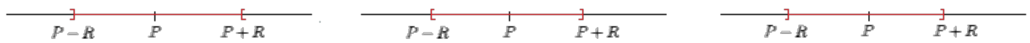


Figure 53: intervalos limitados com mesma fronteira

(b) A fronteira das bolas abertas e das bolas fechadas em $\mathbb{R}^2$ são circunferências: $Fr(B_r(a,b)) = Fr(\overline{B_r(a,b)}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$

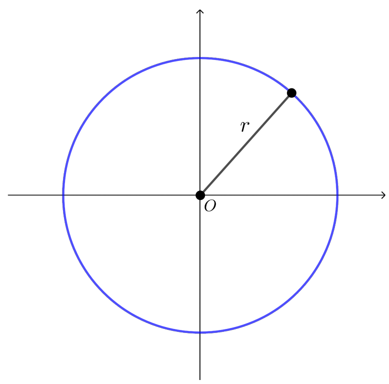


Figure 54: Fronteira de bola aberta e de bola fechada em $\mathbb{R}^2$

(c) A fronteira das bolas abertas e das bolas fechadas em $\mathbb{R}^3$ são esferas: $Fr(B_r(a,b,c)) = Fr(\overline{B_r(a,b,c)}) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2\}$

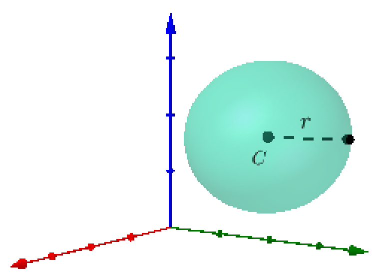


Figure 55: Fronteira de bola aberta e de bola fechada em $\mathbb{R}^3$

5. Seja D um intervalo aberto de $\mathbb{R}$. Sejam $P \in D$ e $Q, R \notin D$.

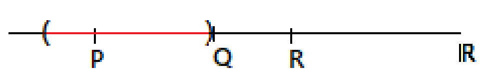


Figure 56: Pontos de acumulação no interior e nos extremos do intervalo

Vemos que $P \in D$ é um p.a. de D, $Q \notin D$ é também um p.a. de D, mas $R \notin D$ não é um p.a. de D.

6. Seja $D =]a_1, c[\cup]c, b[$.

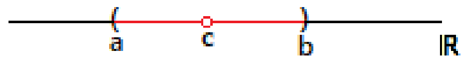


Figure 57: Pontos de acumulação em intervalos furados

Vemos que $c \notin D$ é um p.a. de D.

7. O ponto (a, b) é de acumulação do conjunto $\overline{B_r(a, b)} \setminus \{(a, b)\}$.

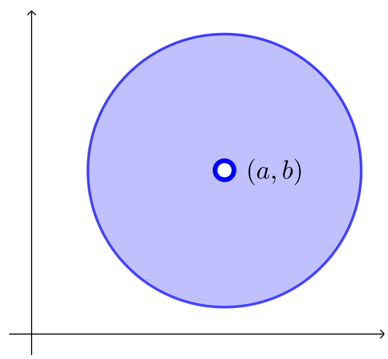


Figure 58: Ponto de acumulação da bola fechada furada em $\mathbb{R}^2$

8. Considere o conjunto D abaixo:

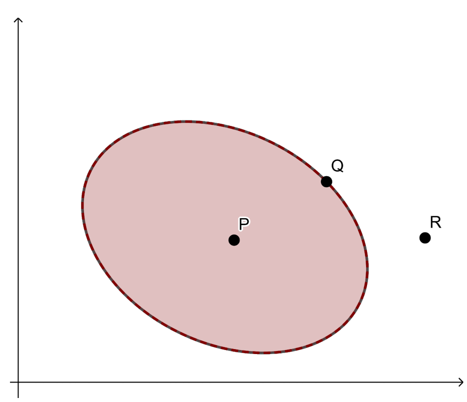


Figure 59: Pontos de acumulação em conjuntos fechados de $\mathbb{R}^2$

Temos que $P, Q \in D$ são p.a. de D e $R \notin D$ não é p.a. de D.

9. Considere o conjunto D abaixo:

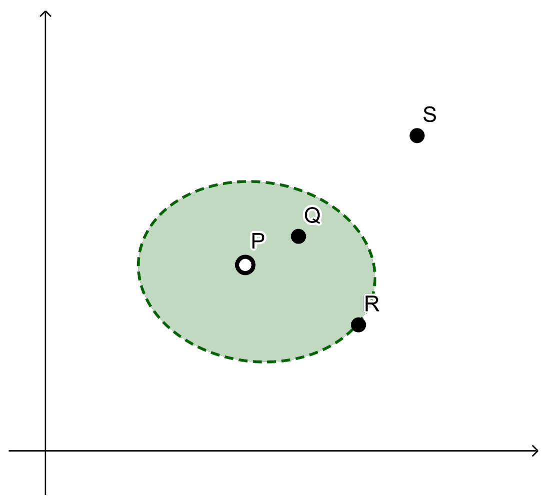


Figure 60: Pontos de acumulação em conjuntos abertos de $\mathbb{R}^2$

Temos que $P \notin D$ é um p.a. de D, $Q \in D$ é p.a., $R \notin D$ é p.a. e $S \notin D$ não é p.a.

Exercícios

1. Esboçar e determinar se os seguintes conjuntos são abertos, fechados, limitados e/ou compactos. Calcule os conjuntos fronteira.

   (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy \neq 0\}$.

   (b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, y \geq 0\}$.

   (c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y < 1 - x^2\}$.

   (d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$.

   (e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \geq 1 - x^2\}$.

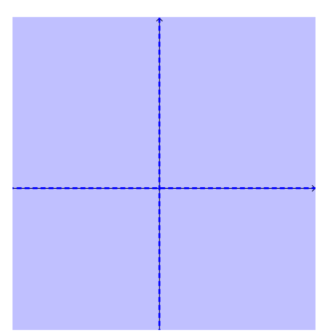
   (f) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 3 < x^2 + y^2 < 9\}$.

   (g) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 5 \leq x^2 + y^2 \leq 7\}$.

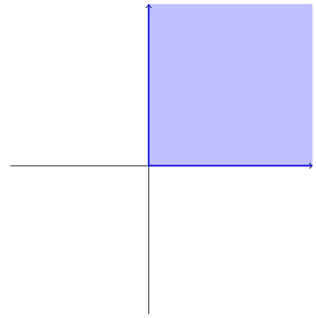
   (h) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 5 \leq x^2 + y^2 < 7\}$.

Respostas

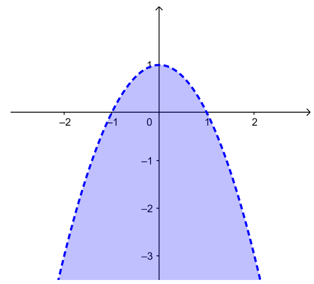
1. (a) aberto, não fechado, não limitado e não compacto. $Fr(A) = \{$reta $x = 0\} \cup \{$reta $y = 0\} = \{0\} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \{0\}$.



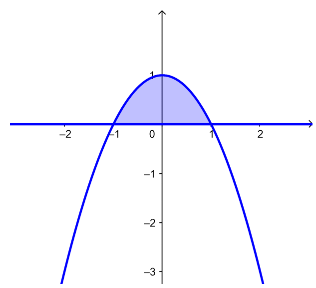
(b) não aberto, fechado, não limitado, não compacto. $Fr(B) = \{0\} \times [0, +\infty) \cup [0, +\infty) \times \{0\}$.



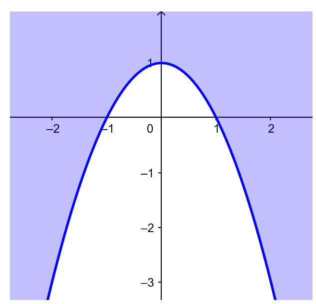
(c) aberto,não fechado, não limitado, não compacto. $Fr(C) = \{(t, 1 - t^2) : t \in \mathbb{R}\}$.



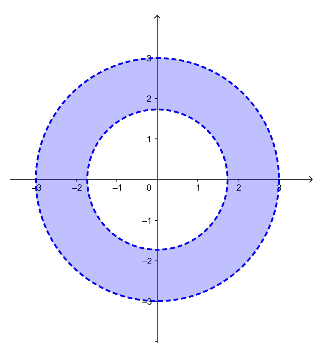
(d) não aberto, fechado, limitado, compacto. $Fr(D) = \{(t, 1 - t^2) : t \in [-1, 1]\} \cup [-1, 1] \times \{0\}$.



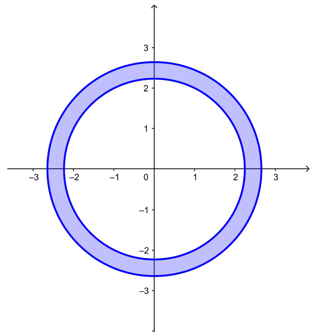
(e) não aberto, fechado, não limitado, não compacto. $Fr(E) = \{(t, 1 - t^2) : t \in \mathbb{R}\}$.



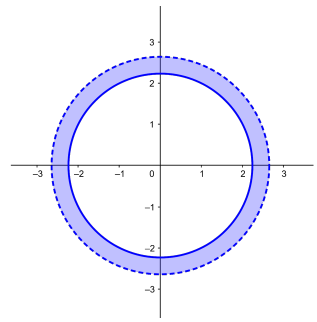
(f) aberto, não fechado, limitado, não compacto. $Fr(F) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 3\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\}$.



(g) não aberto, fechado, limitado, compacto. $Fr(G) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 5\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 7\}$.



(h) não aberto, não fechado, limitado, não compacto. $Fr(H) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2=5\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2=7\}$



Conceito e propriedades de limites

Objetivos:

- Compreender a noção de limites; propriedades dos limites
- existência e unicidade do limite; limites por caminhos;

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $P \in \mathbb{R}^n$ um ponto de acumulação de D. Dizemos que o limite de $f(X)$ quando X tende a P é o número L, e escrevemos

$$\lim_{X \to P} f(X) = L \quad \text{ou} \quad f(X) \to L, \quad \text{se} \quad X \to P$$

quando

$$\lim_{||X-P|| \to 0} |f(x) - L| = 0$$

Se o limite existir, ele deve ser único.

Observação: Para $n = 2$, temos $P = (a, b), X = (x, y)$. Então,

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = L \quad \text{ou} \quad f(x, y) \to L, \quad \text{se} \quad (x, y) \to (a, b)$$

quando

$$\lim_{||(x,y)-(a,b)|| \to 0} |f(x, y) - L| = 0$$

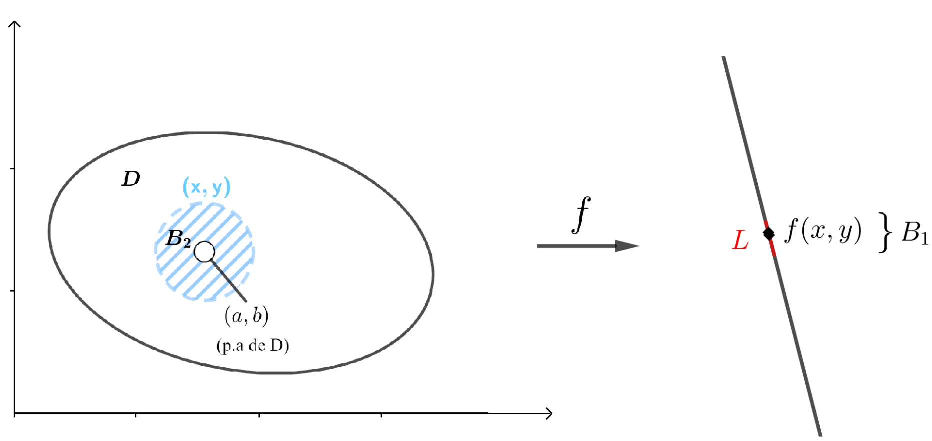


Figure 61: Limite de uma função definida em $\mathbb{R}^2$

Isso significa que para cada bola aberta B_1 de centro L, existe uma bola aberta B_2 de centro (a,b), tal que para todo $(x,y) \in B_2 \subset D$ (exceto provavelmente (a,b)) tem-se $f(x,y) \in B_1 \subset Im(f)$.

Propriedades

Sejam $\lim\limits_{X\to P} f(X) = L_1$, $\lim\limits_{X\to P} g(X) = L_2$ e $k \in \mathbb{R}$.

1. $\lim\limits_{X\to P}(f(X) \pm g(X)) = L_1 \pm L_2$
2. $\lim\limits_{X\to P}(kf(X)) = kL_1$
3. $\lim\limits_{X\to p}(f(X) \cdot g(X)) = L_1 \cdot L_2$
4. $\lim\limits_{X\to P} \dfrac{f(X)}{g(X)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, se $L_2 \neq 0$.
5. Se $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{u\to L_1} h(u) = L$, então

$$\lim_{X\to P} h(f(X)) = \lim_{u\to L_1} h(u) = L$$

Limites por caminhos

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $P = (a,b) \in \mathbb{R}^n$ um ponto de acumulação de D. Se existe o limite $\lim\limits_{X\to P} f(X) = L$, $X = (x,y)$, então o valor do limite ao longo de qualquer caminho contido em D também é L, isto é,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b) \\ \text{ao longo de } C}} f(x,y) = \lim_{t\to t_0} f(\alpha(t)) = L,$$

para qualquer curva $C \subset D$ parametrizada por $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ e tal que $\lim\limits_{t\to t_0} \alpha(t) = P$.

Observação:

(I) Temos o seguinte fato em cálculo de uma variável:

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = L \leftrightarrow \exists \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

Portanto, se $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^-} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)$

(II) Temos o seguinte fato em cálculo de várias variáveis:

$$\exists \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \Leftrightarrow \exists \lim_{\substack{(x,y)\to(a,b) \\ \text{ao longo de } C}} f(x,y) = L,$$

para toda curva C passando por (a,b).

Portanto, se C_1 e C_2 são duas curvas passando por (a,b) tais que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ \text{ao longo de } C_1}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ \text{ao longo de } C_2}} f(x,y) \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$$

(III) Se acharmos dois (ou três ou mil) caminhos quaisquer C_1 e C_2 tais que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ \text{ao longo de } C_1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ \text{ao longo de } C_2}} f(x,y) = L,$$

jamais poderemos dizer que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$, pois poderia se dar o caso de encontrar um outro caminho C_3 com $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ \text{ao longo de } C_3}} f(x,y) \neq L$. Ver Exemplo 7.

Exemplos

1. Se $f(x,y) = c$ (função constante), então $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} c = c$

2. Se $f(x,y) = x$, então $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} x = a$

3. Se $f(x,y) = y$, então $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} y = b$

4. Seja $f(x,y) = 2xy^2 - x^2y + x - y - 3$. Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} f(x,y)$

   Solução
   Por propriedades de limite, temos

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,-1)} 2xy^2 - x^2y + x - y - 3 =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,-1)} 2xy^2 - \lim_{(x,y)\to(1,-1)} x^2y + \lim_{(x,y)\to(1-1)} x - \lim_{(x,y)\to(1,-1)} y - \lim_{(x,y)\to(1-1)} 3 =$$

$$= 2\cdot 1\cdot(-1)^2 - 1^2(-1) + 1 - (-1) - 3 = 2 + 1 + 1 + 1 - 3 = 2$$

5. Seja $f(x,y,z) = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{x^2-y^2-1}$. Calcule $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,1)} f(x,y,z)$.

   Solução
   $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,1)} f(x,y,z) = \dfrac{0+0+1}{0-0+1} = -1$, já que o limite do denominador não se anula.

6. Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\text{sen}\,(xy)}{xy}$.

   Solução

Não podemos aplicar nenhuma propriedade, pois $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy = 0$. Então, façamos $u = xy$. Como $(x,y) \to (0,0)$, então $u \to 0$. Logo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\text{sen}\,(xy)}{xy} = \lim_{u\to 0} \frac{\text{sen}\,(u)}{u} = 1$$

7. Seja f a função definida por $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

   (a) Calcule o limite de $f(x,y)$ quando (x,y) tende a $(0,0)$ ao longo de cada um dos seguintes caminhos:
   (i) eixo dos x; (ii) eixo dos y; (iii) da reta $y = x$.

   (b) Existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$? Em caso afirmativo, qual o seu valor?

   Solução

   (a)

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ \text{ao longo do eixo } x}} f(x,y) = \lim_{t\to 0} f(t,0) = \lim_{t\to 0} \frac{t\cdot 0}{t^2+0^2} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ \text{ao longo do eixo } y}} f(x,y) = \lim_{t\to 0} f(0,t) = \lim_{t\to 0} \frac{0\cdot t}{0^2+t^2} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ \text{ao longo da reta } y=x}} f(x,y) = \lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0} \frac{t\cdot t}{t^2+t^2} = \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}$$

   (b) Observe que o limite ao longo dos eixos é 0, pelo que alguém poderia pensar que o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ e estaria errado. Pois o limite ao longo da reta $y = x$ da $\frac{1}{2}$. Não adianta calcular o limite ao longo de um milhão de caminhos, sempre pode (o não) existir um outro caminho com limite diferente. Se ligue!!

Exercícios

1. Seja f a função definida por $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

   (a) Calcule o limite de $f(x,y)$ quando (x,y) tende a $(0,0)$ ao longo de cada um dos seguintes caminhos:
   (i) eixo dos x; (ii) eixo dos y; (iii) da reta $y = x$.

   (b) Existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$? Em caso afirmativo, qual o seu valor?

2. Calcule, se possível, os seguintes limites:

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\tan\,(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(2,1,0)} \frac{(x+y+z-3)^5}{z^3(x-2)(y-1)}$

(f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)\ln\left(3x^2+3y^2\right)$

(g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+xy)\,\operatorname{sen} xy}{xy}$

(h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(2x)\tan(xy)}{x^2y}$

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\operatorname{sen}^2 x}{x^2+y^4}$

(k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+y}$

Respostas

1. (a) (i) 1 ; (ii) -1; (iii) 0
   (b) não existe

2. (a) 1
   (b) não existe
   (c) não existe
   (d) 2
   (e) não existe
   (f) 0
   (g) 0
   (h) 2
   (i) 0
   (j) 0
   (k) não existe

Cálculo de limites. Continuidade

Objetivos:

- teorema do confronto; teorema do anulamento;
- coordenadas polares; coordenadas esféricas;
- continuidade

Teorema do Confronto: Seja (a,b) um ponto de acumulação de D. Se $f(x,y) \leqslant g(x,y) \leqslant h(x,y)$ em $B_r(a,b)$ e se $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) = L$, então $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L$.

Teorema do Anulamento: Seja (a,b) um ponto de acumulação de D. Se $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 0$ e $g(x,y)$ é limitada em $B_r(a,b)$, isto é, se $|g(x,y)| \leqslant M$, $\forall (x,y) \in B_r(a,b)$, então $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)g(x,y) = 0$.

Observação

(I) O Teorema do confronto e o Teorema do anulamento são válidos em qualquer dimensão.

(II) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} |f(x,y)| = 0$. Válido em qualquer dimensão.

(III) No caso de funções de duas variáveis, podemos calcular o limite passando a coordenadas polares

$$x = \rho \cos\theta \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta,$$

onde $\rho \geq 0$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. Por exemplo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y \cos(x^2+y^2) = \lim_{\rho\to 0} \rho \operatorname{sen}\theta \cos(\rho^2) = 0,$$

pois $|\rho \operatorname{sen}\theta \cos(\rho^2)| \leq \rho$ para todo θ.

(IV) No caso de funções de três variáveis, podemos calcular o limite passando a coordenadas esféricas

$$x = \rho \cos\phi \cos\theta \quad y = \rho \cos\phi \operatorname{sen}\theta \quad z = \rho \operatorname{sen}\phi,$$

onde $\rho \geq 0$, $\phi \in [0, \pi]$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. Por exemplo:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} = \lim_{\rho\to 0} \rho \cos^2\phi \operatorname{sen}\phi \cos\theta \operatorname{sen}\theta = 0,$$

pois $|\rho \cos^2\phi \operatorname{sen}\phi \cos\theta \operatorname{sen}\theta| \leq \rho$ para todo θ, ϕ.

Continuidade: Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $P \in D$ um ponto de acumulação de D. Dizemos que f é contínua em P se

$$\lim_{X\to P} f(X) = f(P)$$

Se f for contínua em todos os pontos de um aberto $A \subset D$, dizemos que f é contínua em A.

Se f for contínua em todos os pontos do domínio D, dizemos que f é contínua.

Propriedades: Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ contínuas em $P \in D$. Então as seguintes funções também são contínuas em P:

(a) $f \pm g$

(b) $f \cdot g$

(c) $\dfrac{f}{g}$, desde que $g(P) \neq 0$

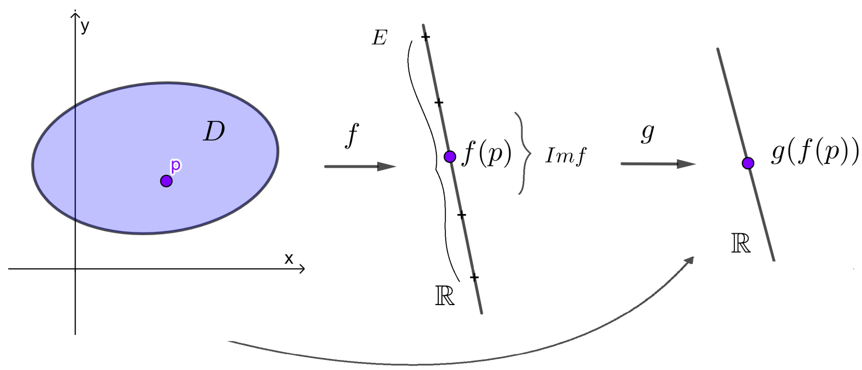
Observações:

(I) Uma função polinomial de duas variáveis é uma soma de termos da forma cx^ny^m, com $c \in \mathbb{R}$, inteiros não negativos. Portanto, usando propriedades de funções contínuas, segue que toda função polinomial é contínua em $\mathbb{R}^2$.

(II) Analogamente, as funções polinomiais de n variáveis são contínuas em $\mathbb{R}^n$.

(II) Uma função racional é o quociente de duas funções polinomiais. Portanto, toda função racional é contínua nos pontos onde o denominador não se anula, isto é, em seu domínio.

Teorema: Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tais que $Im(f) \subset E$. Se f for contínua em P e g contínua em $f(P)$, então a composta $h = g \circ f$ é contínua em P.



$$h = g \circ f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Figure 62: Continuidade da função composta

Exemplos

1. Calcule $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2}$, se existir.

   Solução: Temos

   $$0 < \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2} \right| = |x| \underbrace{\left| \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2} \right|}_{\leq 1} \leqslant |x|$$

   Como $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0$, então pelo Teorema do Confronto, temos $\lim \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2} \right| = 0$, donde $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2} = 0$

2. Calcule $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2}$, se existir.

   Solução: Temos que $0 \leq y^2 \leq y^2 + x^2$, pelo que $\left| \dfrac{y^2}{y^2+x^2} \right| \leq 1$. Aliás, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$, então pelo Teorema do Anulamento,

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y \frac{y^2}{x^2+y^2} = 0$$

3. Calcule $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} y \ln(x^2+y^2)$, se existir.

   Solução: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} y \ln(x^2+y^2) = \lim_{\rho\to 0} \rho \operatorname{sen}\theta \ln(\rho^2) = 0$, pois

   $$\left| \rho \operatorname{sen}\theta \ln(\rho^2) \right| \leq \rho \ln(\rho^2)$$

e $\lim_{\rho\to 0}\rho \ln(\rho^2) = 0$ aplicando L'Hopital.

4. Seja $f(x,y)$ contínua, então $\text{sen}(f(x,y))$, $\ln(f(x,y))$, $\sqrt{f(x,y)}$ são funções contínuas.

5. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{3x^2+3y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

   Determine o conjunto dos pontos de continuidade de f.

   Solução: Observemos que $D_f = \mathbb{R}^2$. Por propriedades de continuidade, segue que f é contínua em $(x,y)\neq(0,0)$. Ora, Vimos na Aula 4, Exemplo 4, que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Logo, f é continua em $\mathbb{R}^2$.

6. Determine o conjunto dos pontos de continuidade de $f(x,y) = \ln\frac{x-y}{x^2+y^2}$.

   Solução: O domínio de f é determinado pela desigualdade $\frac{x-y}{x^2+y^2} > 0, \quad (x,y)\neq(0,0)$, donde $x>y$. Então, $D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x>y\}$

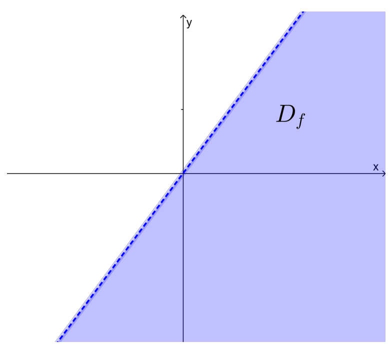


Figure 63: Domínio função $f(x,y) = \ln\frac{x-y}{x^2+y^2}$

A função f é a composta das funções $h(u) = \ln u$ e $g(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$. Como $g(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$ é contínua em D_f por ser racional e $h(u) = \ln u$ é contínua em $\mathbb{R}^+$ por ser logarítmica, então a composta $f = h\circ g$ é contínua em D_f.

7. Determine o conjunto dos pontos de continuidade de

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2+1, & , \text{ se } x^2+y^2\leq 4 \\ 0, & \text{se } x^2+y^2 > 4 \end{cases}$$

   Solução: Temos $D_f = D_1\cup D_2\cup C$, onde $D_1 : x^2+y^2>4$, $D_2 : x^2+y^2<4$ e $C : x^2+y^2 = 4$.

   Temos:

   i f é contínua em D_1, pois $f(x,y) = 0$ (função constante) em D_1;

ii f é contínua em D_2, pois $f(x,y)$ é uma função polinomial em D_2;

iii Temos $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1 = 4 + 1 = 5$ em C. Seja $(a,b) \in C$.
Então $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 5$ ao longo de C. Seja C_1 uma curva passando por (a,b) e contida em D_1. Logo, $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 0 \neq 5$, ao longo de C_1.
Assim, f não é contínua em C e portanto, o conjunto de continuidade de f é $D_1 \cup D_2 = \mathbb{R}^2 - \{(x,y); x^2 + y^2 = 4\}$.

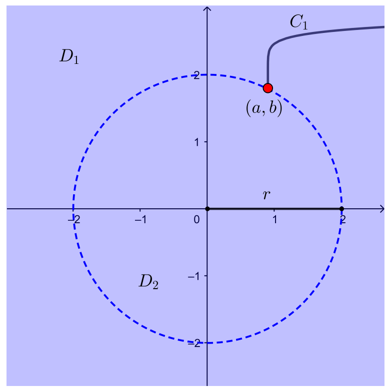


Figure 64: Continuidade da função composta

Exercícios

1. Calcule, se possível, os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^3 - 2x^2y + 3y^2x - 2y^3}{x^2+y^2}$

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{x^3}{x^2+y^4}}$

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \arccos \dfrac{x}{x+y}$

(e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sec \dfrac{\pi(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

(f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 \operatorname{sen}^2 x}{x^2+y^4}$

(g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, por coordenadas polares.

(h) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x \operatorname{sen}(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}$, por coordenadas esféricas.

2. Sabendo que: $1 - \frac{x^3y^2}{3} \leqslant \frac{\arctan(xy)}{xy} < 1$. Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\arctan(xy)}{xy}$

3. A função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ é contínua em $(0,0)$?

4. A função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}\,(xy)}{xy}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ é contínua em $(0,0)$?

5. Determine o conjunto dos pontos de continuidade de

   (a) $f(x,y) = \ln \frac{x+y}{x^2-y^2}$

   (b) $f(x,y) = \sqrt{y - \frac{1}{x}}$

6. Discuta a continuidade das funcões abaixo:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{x^4y^2}{x^8+y^4}$, se $(x,y) \neq (0,0)$; $f(0,0) = 0$

   (b) $f(x,y) = \dfrac{\text{sen}\,(x^2+y^2)}{1 - \cos\sqrt{x^2+y^2}}$, se $(x,y) \neq (0,0)$; $f(0,0) = 2$

   (c) $f(x,y) = \dfrac{y^4 + 3x^2y^2 + 2yx^3}{(x^2+y^2)^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$; $f(0,0) = 0$

   (d) $f(x,y) = e^{\frac{1}{x^2+y^2-1}}$, se $x^2+y^2 < 1$; $f(x,y) = 0$, se $x^2+y^2 \geqslant 1$.

7. Calcule o valor de k para que a função dada seja continua em $(0,0)$:

   (a) $f(x,y) = (x^2+y^2)\,\text{sen}\,\frac{1}{xy}$, $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = k$

   (b) $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{\sqrt{y^2+1}-1}$, $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = k - 4$.

Respostas

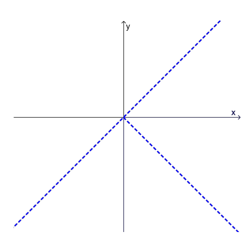
1. (a) 0
   (b) 0
   (c) 1
   (d) $\pi/3$
   (e) 1
   (f) 0
   (g) 0
   (h) 0

2. 1.

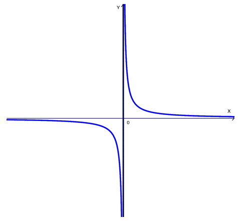
3. Não

4. Não

5. (a) $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $y < x$, $x \neq -y$



   (b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; y \geq \frac{1}{x}$, $x > 0$ ou $y \leq \frac{1}{x}$, $x < 0$



6. (a) Não é em $(0,0)$

   (b) É em $\mathbb{R}^2$

   (c) Não é em $(0,0)$

   (d) É em $\mathbb{R}^2$

7. (a) $k=0$

   (b) $k=4$

Derivadas Parciais

Objetivos:

- definição e interpretação geométrica das derivadas parciais;
- cálculo das derivadas parciais;
- derivada parcial como taxa de variação;

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função definida no conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^2$. Seja $(a, b) \in D$.

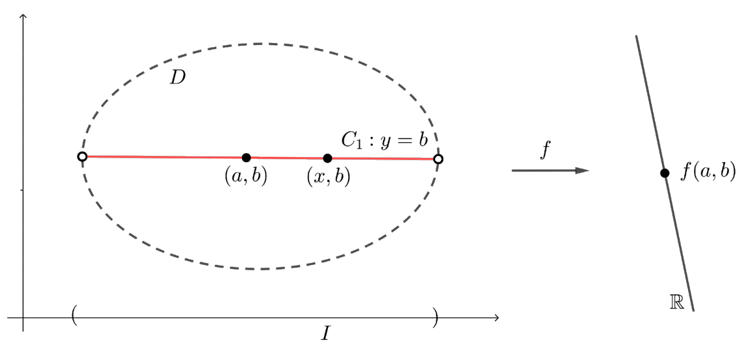


Figure 65: Segmento interseção $C_1 : y = b, x \in I$

Fixando $y = b$, obtemos o segmento interseção $C_1 : y = b, x \in I$. A função $g(x) = f(x, b), x \in I$, é bem definida em C_1. A derivada de g em $x = a$ seria dada por

$$g'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

ou equivalentemente,

$$g'(a) = \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}$$

se existir o limite. Essa derivada é dita derivada parcial de f em relação a x no ponto (a, b) é indicada por:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \text{ ou } f_x(a, b) \text{ ou } \frac{\partial z}{\partial x}(a, b) \text{ ou } z_x(a, b).$$

Então, definiremos a derivada parcial de f em relação a x no ponto (a, b) como sendo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = f_x(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

ou equivalentemente,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = f_x(a,b) = \lim_{x\to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x-a},$$

se o limite existir. Caso contrário diremos que a derivada parcial não existe.

Analogamente, definimos a derivada parcial de f em relação a y, no ponto (a, b), por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = f_y(a,b) = \frac{\partial z}{\partial y}(a,b) = z_y(a,b) = \lim_{k\to 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k}$$

ou equivalentemente,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = f_y(a,b) = \frac{\partial z}{\partial y}(a,b) = z_y(a,b) = \lim_{y\to b} \frac{f(a,y) - f(a,b)}{y-b},$$

se o limite existir. Caso contrário diremos que a derivada parcial não existe.

Interpretação geométrica de $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$: Geometricamente, estamos fazendo a restrição de f sobre a reta $y = b$ e olhando para a curva correspondente $f(C_1)$, sobre o gráfico de f. Dessa maneira, o número $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = g'(a)$ é o coeficiente angular da reta tangente à curva $f(C_1)$ no ponto $(a, b, f(a, b))$. Isto é $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \tan\alpha$.

Interpretação geométrica de $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$: Geometricamente, temos que $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ é o coeficiente angular da reta tangente à curva $f(C_2)$ obtida como a interseção do G_f com o plano $x = a$, no ponto $(a, b, f(a, b))$. Isto é, $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \tan\beta$.

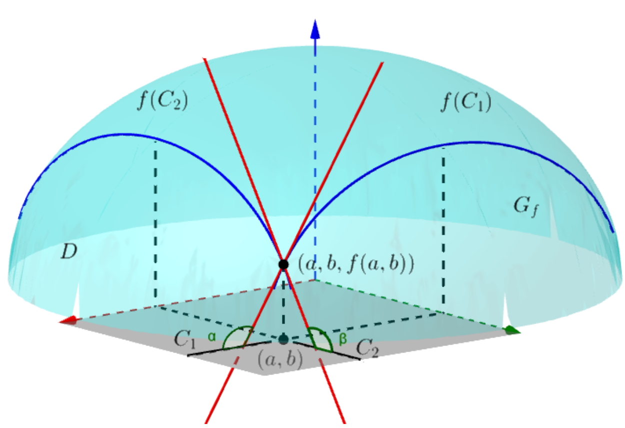


Figure 66: Segmento interseção $C_2 : x = a, y \in J$ e $C_1 : y = b, x \in I$

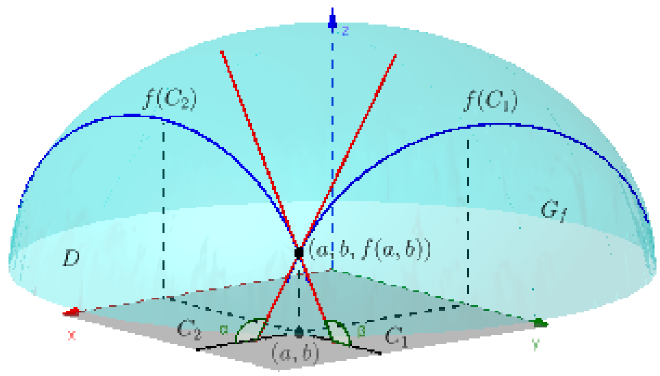


Figure 67: Interpretação geométrica das derivadas parciais

Derivadas parciais como taxas de variação: Como $f_x(a, b)$ é a inclinação da reta tangente à curva $f(C_1)$ no ponto $(a, b, f(a, b))$, também pode ser interpretada como a taxa de variação da função f em relação a x no ponto (a, b) (ao longo da curva C_1).

Com efeito, $f_x(a, b)$ é a taxa de variação instantânea da função $g(x) = f(x, b)$, $x \in I$, no ponto $x = a$. Como tal, ela pode ser aproximada por taxas de variação médias:

$$f_x(a, b) \approx \frac{1}{2}\left[\frac{f(a + h_1, b) - f(a, b)}{h_1} + \frac{f(a + h_2, b) - f(a, b)}{h_2}\right],$$

com $a + h_1 < a < a + h_2$.

Analogamente, $f_y(a, b)$ é a taxa de variação da função f em relação a y no ponto (a, b) (ao longo da curva C_2). Como tal, ela pode ser aproximada por taxas de variação médias:

$$f_y(a, b) \approx \frac{1}{2}\left[\frac{f(a, b + k_1) - f(a, b)}{k_1} + \frac{f(a, b + k_2) - f(a, b)}{k_2}\right],$$

com $b + k_1 < b < b + k_2$.

Regra prática para calcular as parciais: Para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, faz-se y constante e deriva-se f em relação a x e para calcular $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, faz-se x constante e deriva-se f em relação a y.

Por exemplo, se $f(x, y) = x^3y^2$, então $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2y^2$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2yx^3$.

Derivadas parciais de funções de três variáveis: Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, D aberto, e $(a, b, c) \in D$. Definimos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x, b, c) - f(a, b, c)}{\Delta x}, \text{ se o limite existir.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(a, b + \Delta y, c) - f(a, b, c)}{\Delta y}, \text{ se o limite existir.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(a,b,c+\Delta z) - f(a,b,c)}{\Delta z}, \text{ se o limite existir.}$$

Na hora de calcular $\frac{\partial f}{\partial z}$, faz-se x e y constantes e deriva-se f em relação a z. Analogamente para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exemplos

1. Seja $f(x,y) = x$. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pela definição.

   Solução

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

   $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{x-x}{k} = \lim_{k\to 0} 0 = 0$$

2. Seja $f(x,y) = y$. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pela definição.

   Solução

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{y-y}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

   $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{y+k-y}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{k}{k} = \lim_{k\to 0} 1 = 1$$

3. Seja $f(x,y) = 2xy - 3y$. Calcule

   (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

   (b) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

   (c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)$

   (d) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-1,1)$.

   Solução

   (a) Mantendo y constante e derivando em relação a x, temos

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy - 3y) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) - \frac{\partial}{\partial x}(3y) = 2y - 0 = 2y$$

   (b) Mantendo x constante e derivando em relação a y, temos:

   $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy - 3y) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) - \frac{\partial}{\partial y}(3y) = 2x - 3$$

(c) Como $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2y$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, então $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2$.

(d) Como $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x-3$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, então $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-1,1) = -5$.

4. Calcule as derivadas parciais de $z = x^2 \ln\left(x^2+y^2\right)$.

Solução

Mantendo y constante e usando regras de derivação para as funções de uma variável, como $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, temos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\right)\ln\left(x^2+y^2\right)+x^2\frac{\partial}{\partial x}\ln\left(x^2+y^2\right) = 2x\ln\left(x^2+y^2\right)+x^2\cdot\frac{\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} =$$

$$= 2x\ln\left(x^2+y^2\right)+x^2\cdot\frac{2x}{x^2+y^2} = 2x\ln\left(x^2+y^2\right)+\frac{2x^3}{x^2+y^2}$$

Analogamente, mantendo x constante, temos

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2\frac{\partial}{\partial y}\ln\left(x^2+y^2\right) = x^2\cdot\frac{\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} = x^2\cdot\frac{2y}{x^2+y^2} = \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$$

5. Calcule a equação da reta tangente à curva de interseção do paraboloide $z = 2x^2+3y^2$ e o plano $x=1$ no ponto $(1,2,14)$.

Solução Observe que o ponto $(1,2,14)$ pertence à interseção de G_f e o plano $x=1$. Portanto, o coeficiente angular da reta tangente será $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 6y|_{(1,2)} = 6\cdot 2 = 12$. Logo, a equação da reta tangente é:

$$\begin{cases} z = 14+12(y-2) \\ x = 1 \end{cases}$$

6. Calcule a equação da reta tangente à curva de interseção da superfície $x^2+y^2+z^2 = 5$ e o plano $y=0$ no ponto $(2,0,-1)$.

Solução Como a terceira coordenada do ponto $(2,0,-1)$ é negativa, consideraremos a função $f(x,y) = -\sqrt{5-x^2-y^2}$. O ponto $(2,0,-1)$ pertence à interseção de G_f e o plano $y=0$, portanto, o coeficiente angular da reta tangente será $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,0) = -\left.\dfrac{-2x}{2\sqrt{5-x^2-y^2}}\right|_{(2,0)} = 2$. Logo, a equação da reta tangente é:

$$\begin{cases} z = -1+2(x-2) \\ y = 0 \end{cases}$$

7. De acordo com a lei dos gases ideais, a pressão está relacionada com a temperatura e o volume de um gás. Suponha que o volume V seja medido em litros (l) e a temperatura T seja medida em kelvins (K). Use a tabela a seguir para:

Temperatura K°

Volume L	10,00	30,00	50,00	70,00
20,00	10,00	30,00	50,00	70,00
40,00	5,00	15,00	25,00	35,00
60,00	3,33	10,00	16,67	23,33
80,00	2,50	7,50	12,50	17,50

Figure 68: Tabela lei dos gases ideais

(a) obter uma estimativa da taxa de variação instantânea da pressão em relação à temperatura se a temperatura for 50 K e o volume permanecer constante em 60 l;

(b) obter uma estimativa da taxa de variação instantânea da pressão em relação ao volume se a temperatura permanecer constante a 30 K e o volume for 40 l;

(c) A pressão aumenta ou diminui em relação à temperatura? E em relação ao volume?

Solução

(a) Dado que $\dfrac{\partial P}{\partial T}(T_0, V_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{P(T_0 + h, V_0)}{h}$, a taxa de variação pode ser estimada considerando a média das taxas de variação média com, por exemplo, $h_1 = 20$ e $h_2 = -20$. Com efeito,

$$\frac{\partial P}{\partial T}(50, 60) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{P(50+20, 60) - P(50, 60)}{20} + \frac{P(50-20, 60) - P(50, 60)}{-20}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{23.33 - 16.67}{20} + \frac{10 - 16.67)}{-20}\right) = \frac{1}{2}(0.33 + 0.33) = 0.33$$

(b) Dado que $\dfrac{\partial P}{\partial V}(T_0, V_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{P(T_0, V_0 + h)}{h}$, a taxa de variação considerada pode ser estimada considerando a média das taxas de variação média com, por exemplo, $h_1 = 20$ e $h_2 = -20$. Com efeito,

$$\frac{\partial P}{\partial V}(30, 40) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{P(30, 40+20) - P(30, 40)}{20} + \frac{P(30, 40-20) - P(30, 40)}{-20}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{10 - 15}{20} + \frac{30 - 15)}{-20}\right) = \frac{1}{2}(-0.25 + (-0.75)) = -0.50$$

(c) Como $\frac{\partial P}{\partial T}(50,60)>0$, a pressão aumenta em relação à temperatura quando o volume é constante $V=60$ e a temperatura pega o valor de 50K. Já em relação ao volume quando a temperatura é constante a $T=30$ e o volume pega o valor de 40L a pressão diminui, pois $\frac{\partial P}{\partial V}(30,40)<0$.

Observamos que, segundo os dados da tabela, quando afixamos o volume e percorremos os valores da temperatura a pressão sempre aumenta. Porem, se fixamos a temperatura e percorremos os valores do volume, a pressão diminui.

8. Seja $f(x,y)=\frac{y^3}{x^2+y^2}$, se $(x,y)\neq(0,0)$ e $f(x,y)=0$, se $(x,y)=(0,0)$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

Solução

Nos pontos $(x,y)\neq(0,0)$, aplicamos regras de derivação. Então,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{-y^3\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{3y^2\left(x^2+y^2\right)-y^3\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{3x^2y^2+3y^4-2y^4}{(x^2+y^2)^2}=\frac{3x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

Em $(x,y)=(0,0)$, usamos a definição. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{k^3}{k^2}-0}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{k}{k}=\lim_{k\to 0}1=1.$$

Portanto, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\frac{-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\frac{3x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

9. Seja $f(x,y,z)=\int_0^{x+y^2+z^4} g(t)dt$, onde $g(3)=4$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1)$ e $\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)$.

Solução

Aqui, usaremos a seguinte aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo: " Se $F(x) = \displaystyle\int_a^{\alpha(x)} f(t)dt$, então $F'(x) = f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x)$".

Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = g\left(x+y^2+z^4\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(x+y^2+z^4\right) = g\left(x+y^2+z^4\right)\cdot 1 = g\left(x+y^2+z^4\right)$$

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1) = g(1+1+1) = g(3) = 4$$

Temos,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = g\left(x+y^2+z^4\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(x+y^2+z^4\right) = g\left(x+y^2+z^4\right).2y,$$

donde $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) = g(3)\cdot 2 = 8.$

Temos,

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = g\left(x+y^2+z^4\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(x+y^2+z^4\right) = g\left(x+y^2+z^4\right)\cdot 4z^3,$$

donde $\dfrac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) = g(3)\cdot 4 = 16$

10. Seja $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e seja $f(x,y) = (x^2+y^2)\,\phi\left(\frac{x}{y}\right)$. Mostre que $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2f$.

Solução

Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\phi\left(\frac{x}{y}\right)+\left(x^2+y^2\right)\phi'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) = 2x\phi\left(\frac{x}{y}\right)+\left(x^2+y^2\right)\phi'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y},$$

donde $x\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x^2\phi\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y}\left(x^2+y^2\right)\phi'\left(\frac{x}{y}\right).$

Temos,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= 2y\phi\left(\frac{x}{y}\right) + \left(x^2+y^2\right)\phi'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right)\\ &= 2y\phi\left(\frac{x}{y}\right) + \left(x^2+y^2\right)\phi'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = 2y\phi\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y^2}\left(x^2+y^2\right)\phi'\left(\frac{x}{y}\right),\end{aligned}$$

donde, $y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y^2\phi\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y}\left(x^2+y^2\right)\phi'\left(\frac{x}{y}\right)$

Somando as duas expressões das parciais, temos

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=2\left(x^2+y^2\right)\phi\left(\frac{x}{y}\right)=2f$$

como queríamos mostrar.

11. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ diferenciável e seja g dada por $g(x,y,z)=f(r)$, onde $r=\|(x,y,z)\|$. Verifique

$$\frac{\partial g}{\partial x}+y\frac{\partial g}{\partial y}+z\frac{\partial g}{\partial z}=rf'(r).$$

Solução

Temos

$$g(x,y,z)=f(r),r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

.

Então,

$$\frac{\partial g}{\partial x}=f'(r)\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=f'(r)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=f'(r)\frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=f'(r)\cdot\frac{\partial r}{\partial y}=f'(r)\cdot\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=f'(r)\frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}=f'(r)\cdot\frac{\partial r}{\partial z}=f'(r)\cdot\frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=f'(r)\frac{z}{r}$$

$$x\frac{\partial g}{\partial x}+y\frac{\partial g}{\partial y}+z\frac{\partial g}{\partial z}=f'(r)\frac{x^2}{r}+f'(r)\frac{y^2}{r}+f'(r)\frac{z^2}{r}$$

$$=f'(r)\frac{x^2+y^2+z^2}{r}=f'(r)\frac{r^2}{r}=rf'(r)$$

Como queríamos verificar.

Exercícios

1. Determine as derivadas parciais da função:

   (a) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^2+3}$

   (b) $f(x,y)=\text{arctan}\,\frac{y}{x}$

   (c) $f(x,y)=\int_{x^2}^{y^2}e^{-t^2}dt$

   (d) $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$

   (e) $\omega=xe^{x-y-z}$

2. A altura h de ondas em mar aberto depende da velocidade do vento v e do tempo t durante o qual o vento se manteve naquela intensidade. Os valores da função $h = f(v,t)$ são apresentados na seguinte tabela.

Duração (horas)

Velocidade do vento (km/h)

v \ t	5	10	15	20	30	40	50
20	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
30	1,2	1,3	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6
40	1,5	2,2	2,4	2,5	2,7	2,8	2,8
60	2,8	4,0	4,9	5,2	5,5	5,8	5,9
80	4,3	6,4	7,7	8,6	9,5	10,1	10,2
100	5,8	8,9	11,0	12,2	13,8	14,7	15,3
120	7,4	11,3	14,4	16,6	19,0	20,5	21,1

(a) segundo a tabela, a qual taxa (estimada) varia a altura das ondas em relação à velocidade do vento quando dita velocidade é de $30\ km/h$ e sabendo que o vento se mantém na mesma intensidade por um tempo de 20 horas? Justifique a resposta.

(b) segundo a tabela, a qual taxa (estimada) varia a altura das ondas em relação ao tempo no qual o vento se mantém na mesma intensidade se dito tempo é de 20 horas e sabendo que a velocidade do vento permanece constante a $30\ km/h$? Justifique a resposta.

(c) nas condições do item (a) e (b), a altura das ondas aumenta o diminui em relação ao tempo? E em relação à velocidade do vento? Justifique a resposta.

3. Use as derivadas parciais para encontrar, se possível, a equação da reta tangente à curva interseção do plano $x = \pi$ com a superfície $z = \dfrac{2y}{y + \cos x}$ nos pontos $P(\pi, 2, 4)$, $Q(2\pi, 1, 1)$ e $R(\pi, 0, 1)$.

4. Seja $z = f\left(x^2 - y^2\right)$, onde $f(u)$ é uma função diferenciável de uma variável. Verifique que
$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

5. Seja $f(x,y) = x^3y^2 - 6xy + \phi(y)$. Determine uma função ϕ, de modo que $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y - 6x + \dfrac{y}{y^2+1}$.

6. Seja $f(x,y) = \dfrac{5xy^2}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(x,y) = 0$ se $(x,y) = (0,0)$. Calcule $f(1,2) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

7. Seja $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$. Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

8. Seja $f(x,y) = \dfrac{x^4}{x^2 + y^2}, (x,y) \neq (0,0)$, $f(x,y) = 0$, $(x,y) = (0,0)$. Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Respostas

1. (a) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^2+3)^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{\sqrt[3]{(x^3+y^2+3)^2}}$

   (b) $f_x = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $f_y = \frac{x}{x^2+y^2}$

   (c) $\frac{\partial f}{\partial x} = -2xe^{-x^4}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{-y^4}$

   (d) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}$

   (e) $\frac{\partial \omega}{\partial x} = (1+x)e^{x-y-z}$, $\frac{\partial \omega}{\partial y} = -xe^{x-y-z}$, $\frac{\partial \omega}{\partial z} = -xe^{x-y-z}$

2. (a) $0,095\ km/h$

   (b) $0\ km/h^2$

   (c) Aumenta em relação ao tempo e permanece constante em relação a velocidade do vento.

3. A reta tangente no ponto P é $\begin{cases} z = 8 - 2y \\ x = \pi \end{cases}$ e não existe nos pontos Q e R.

4. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$ e $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$.

5. $\phi(y) = \frac{1}{2} \ln(1+y^2)$

6. $\frac{12}{5}$

7. $0; -1$

8. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^5 + 4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-2x^4y}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$

Diferenciabilidade. Plano tangente.

Objetivos:

- diferenciabilidade de uma função de duas ou três variáveis;
- funções de classe C^1; condição suficiente para uma função ser diferenciável;
- equações cartesianas do plano tangente ao gráfico da função em um ponto;
- equações paramétricas da reta normal ao gráfico da função em um ponto;

Diferenciabilidade: Lembrando o conceito de diferenciabilidade em funções de uma variável.

Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida no aberto $D \subset \mathbb{R}$ e $a \in D$ um ponto no domínio. Dizemos que f é diferenciável em a se o seguinte limite existir

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Temos, portanto

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h} = 0 \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{\varepsilon(h)}{h} = 0$$

Onde,

$$\varepsilon(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a)h$$

Essa definição sugere a seguinte definição de diferenciabilidade para funções de duas variáveis.

Definição 1: Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida no aberto $D \subset \mathbb{R}^2$. Seja $(a, b) \in D$. Dizemos que f é diferenciável em (a, b) se existirem $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)$, tais que

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{\varepsilon\,(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0,$$

onde

$$\varepsilon\,(h, k) = f(a + h, b + k) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k.$$

Definição 2: Dizemos que $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável no aberto $A \subset D$ se for diferenciável em todos os pontos $(a,b) \in A$. Em particular, dizemos que f é diferenciável se for diferenciável no domínio aberto D.

Exemplo: Mostre que $f(x,y) = xy$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

Com efeito, seja $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, temos $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = b$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = a$. Portanto,

$$\varepsilon(h,k) = f(a+h, b+k) - f(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k =$$

$$= (a+h)(b+k) - ab - bh - ak = ab + ak + bh + hk - ab - bh - ak = hk$$

Donde

$$\frac{\varepsilon(h,k)}{|\,|(h,k)|\,|} = \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} = h \cdot \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Temos

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} h = 0 \quad \text{e} \quad \left| \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| = \frac{|\,k\,|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{\sqrt{|k|^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \sqrt{\frac{k^2}{h^2+k^2}} \leq \sqrt{\frac{h^2+k^2}{h^2+k^2}}$$

Então, pelo teorema do anulamento, temos $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{|\,|\,(h,k)|\,|} = 0$ Portanto, $f(x,y) = xy$ é diferenciável em $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Como (a,b) é arbitrário, segue que f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

Propriedades: Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciáveis em $P \in D$. Então as seguintes funções também são diferenciáveis em P:

(a) $f \pm g$

(b) $f \cdot g$

(c) $\dfrac{f}{g}$, desde que $g(P) \neq 0$

Exemplo:

(I) As funções polinomiais são diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$.

(II) As funções racionais são diferenciáveis no domínio delas (isto é, onde o denominador não se anula).

Teorema 1: Se f é diferenciável em $(a,b) \Rightarrow f$, então f é contínua em (a,b).

Teorema 2: Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida no aberto $D \subset \mathbb{R}^2$ e $(a,b) \in D$. Se existirem $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ em um aberto contendo (a,b) e forem contínuas em (a,b), então f é diferenciável (a,b).

Definição 2: Dizemos que f é de classe C^1 no aberto $A \subset D$ se as funções $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ forem contínuas em todos os pontos $(a, b) \in A$.

Observações:

1. O limite da Definição 1 é equivalente a

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - f(a,b) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0$$

   e a

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)\Delta x - \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

2. Se uma das derivadas parciais não existir em (a,b), então f não é diferenciável em (a, b).

3. Se $\exists \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ e $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{\|(h,k)\|} \neq 0$ ou se $\nexists \displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{||(h,k)||}$, então f não é diferenciável em (a, b).

4. Em particular, se para algum caminho C_1, $\displaystyle\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0) \\ \text{ao longo de } C_1}} \frac{\varepsilon(h,k)}{\|(h,k)\|}$ for diferente de zero ou não existir, então f não é diferenciável em (a, b).

5. f não é contínua em $(a, b) \Rightarrow f$ não é diferenciável em (a, b).

6. Se $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, D aberto, for de classe C^1 em D, então f é diferenciável (em todo o domínio D).

Plano tangente e Reta normal: Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida no aberto $D \subset \mathbb{R}^2$ e diferenciável em $(a, b) \in D$.

O plano de equação

$$z - f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

é denominado plano tangente ao G_f, gráfico de f, no ponto $(a, b, f(a, b))$.

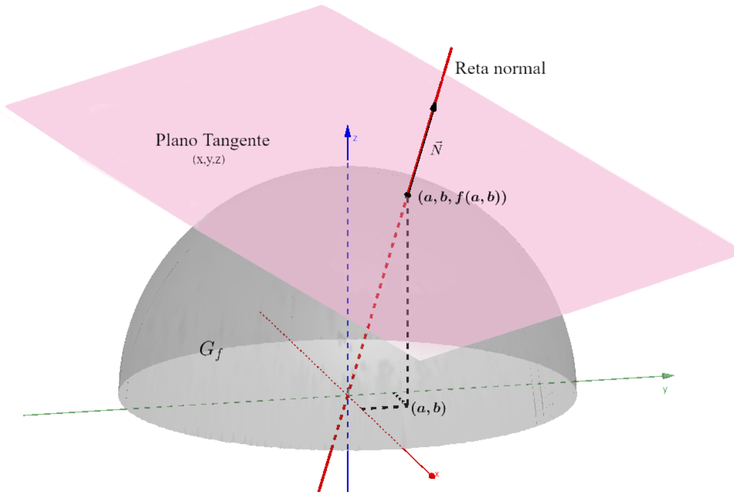


Figure 69: Plano tangente a G_f em $(a,b,f(a,b))$

Da equação do plano temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-a)-(z-f(a,b))=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b),\frac{\partial f}{\partial y}(a,b),-1\right)}_{\vec{N}}\cdot\underbrace{(x-a,y-b,z-f(a,b))}_{\text{vetor do plano tangente}}=0$$

Logo, $\vec{N}=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b),\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b),-1\right)$ é um vetor normal ao plano tangente no ponto $(a,b,f(a,b))$.

A reta que passa por $(a,b,f(a,b))$ e é paralela ao vetor $\vec{N}$ é dita reta normal ao gráfico de f no ponto $(a,b,f(a,b))$. A equação paramétrica da reta normal é:

$$(x,y,z)-(a,b,f(a,b))=\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b),\frac{\partial f}{\partial y}(a,b),-1\right),\lambda\in\mathbb{R}$$

Observação: O plano tangente à superfície $z=f(x,y)$ no ponto $P=(a,b,f(a,b))$ contêm as duas retas tangentes T_1 e T_2 à curva interseção da superfície com os planos $x=a$ e $y=b$, respectivamente.

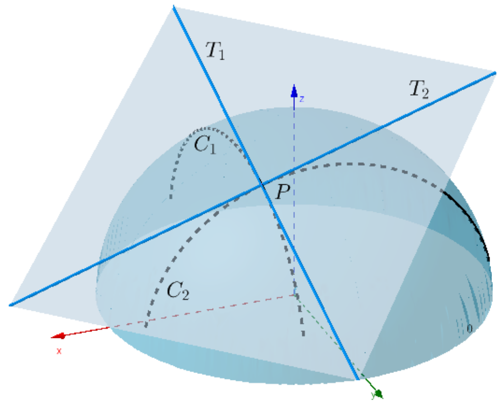


Figure 70: O plano tangente contêm as duas retas tangentes.

Exemplos

1. Seja $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$. f é diferenciável em $(0,0)$?

   Solução

   Temos $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{h^2}-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|h|}{h}$ não existe.

   Logo, pelo item 1 das Observações, concluímos que f não é diferenciável em $(0,0)$.

2. Seja $f(x,y)=\dfrac{y^3}{x^2+y^2}$, se $(x,y)\neq(0,0)$ e $f(x,y)=0$, se $(x,y)=(0,0)$. f é diferenciável em $(0,0)$?

   Solução

   Pelo Exemplo 8 da seção de Derivadas Parciais temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

   Contudo,

$$\frac{\varepsilon(h,k)}{\|(h,k)\|}=\frac{f(h,k)-f(0,0)-0\cdot h-1\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{\frac{k^3}{h^2+k^2}-k}{\sqrt{h^2+k^2}}=$$

$$=\frac{-h^2k}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}=g(h,k)$$

Consideremos o conjunto $C : k = h, h \neq 0$, temos que
$g(h,k) = g(h,h) = \dfrac{-h^3}{2h^2\sqrt{2h^2}} = \dfrac{-h}{2\sqrt{2}|h|}$, donde $\nexists \displaystyle\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ \text{ao longo de } C}} g(h,k)$.

Portanto, $\nexists \displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{\varepsilon(h,k)}{||h,k||}$ e, assim f não é diferenciável em $(0,0)$.

3. Mostre que a recíproca do Teorema 1 é falsa.

   Solução

   Considere a função $f(x,y) = \dfrac{y^3}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$; $f(x,y) = 0$, $(x,y) = (0,0)$.
   Temos $f(x,y) = \dfrac{y^3}{x^2+y^2} = y \cdot \dfrac{y^2}{x^2+y^2}$, onde $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$ e $\left|\dfrac{y^2}{x^2+y^2}\right| = \dfrac{y^2}{x^2+y^2} \leqslant \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$, donde $\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$ é limitada.
   Logo, pelo corolário do teorema do confronto, segue que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

   Portanto, f é continua em $(0,0)$. Sendo que já vimos no Exemplo 1 que f não é diferenciável.

4. $f(x,y) = 3x^2y - 2xy^2 - 5xy + 4x - 2y + 1$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$, pois $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6xy - 2y^2 - 5y + 4$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2 - 4xy - 5x - 2$ são funções contínuas em $\mathbb{R}^2$.

5. A função $f(x,y) = \textsf{cos}\,(x^2+y^2)$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$, pois $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x\,\textsf{sen}\,(x^2+y^2)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y\,\textsf{sen}\,(x^2+y^2)$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$

6. A função $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$, $f(x,y) = 0$, $(x,y) = (0,0)$ é diferenciável em $(0,0)$?

   Solução

   Seja $C_1 : y = 0, x \neq 0$. Temos $f(x,y) = f(x,0) = 0$ em C_1, logo,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{ao longo de } C_1}} f(x,y) = 0.$$

   Seja $C_2 : y = x, x \neq 0$. Temos $f(x,y) = f(x,x) = \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$ em C_2, logo

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{ao longo de } C_2}} f(x,y) = \frac{1}{2}.$$

Como os limites por caminhos não coincidem, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe.

Portanto f não é contínua em $(0,0)$. Logo, pelo Teorema 1, segue que f não é diferenciável em $(0,0)$.

7. Mostre que a função $f(x,y) = \dfrac{x^4}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(x,y) = 0$ se $(x,y) = (0,0)$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

Solução

Do exercício 7 da seção de Derivadas Parciais temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^5+4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-2x^4y}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

As funções $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $(x,y) \neq (0,0)$, pois são funções racionais. Em $(x,y) = (0,0)$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x^5+4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^5}{(x^2+y^2)^2} + \frac{4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = 2x \cdot \frac{x^4}{(x^2+y^2)^2} + 2x\frac{2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

onde $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 2x = 0$, e as funções $\dfrac{x^4}{(x^2+y^2)^2}$ e $\dfrac{2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$ são limitadas por 1 .

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2x^4y}{(x^2+y^2)^2} = -2y \cdot \frac{x^4}{(x^2+y^2)^2},$$

onde $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (-2y) = 0$ e a função $\dfrac{x^4}{(x^2+y^2)^2}$ é limitada por 1.

Assim, pelo teorema do anulamento, temos $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Logo, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$ e pelo teorema 2, concluímos que f é diferenciável (em $\mathbb{R}^2$).

8. Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico de $f(x,y) = 2x^2y$ no ponto $(1,1,f(1,1))$.

Solução:

Equação do plano tangente:

$$z - f(1,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)$$

onde

$$\begin{cases} f(1,1) = 2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4xy \quad \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 4 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 2 \end{cases}$$

Logo, a equação do plano tangente é:

$$z - 2 = 4(x-1) + 2(y-1) \text{ ou } 4x + 2y - z = 4$$

Equação da reta normal:

$$(x,y,z) = (1,1,2) + \lambda(4,2,-1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

9. Determine o plano que passa pelos pontos $(1,1,2)$ e $(-1,1,1)$ e que seja tangente ao gráfico de $f(x,y) = xy$.

Solução

Seja $(a,b) \in D_f = \mathbb{R}^2$. A equação do plano tangente ao G_f no ponto $(a,b,f(a,b)) = (a,b,ab)$ é :

$$z - f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

donde $z = ab + b(x-a) + a(y-b)$ ou $z = bx + ay - ab$.

Como $(1,1,2)$ e $(-1,1,1)$ estão neste plano, então

$$\begin{cases} 2 = b + a - ab \\ 1 = -b + a - ab \end{cases}$$

$(1) - (2) \Rightarrow 1 = 2b \Rightarrow b = \frac{1}{2}$. Substituindo $b = \frac{1}{2}$ em (1), temos $2 = \frac{1}{2} + a - \frac{a}{2}$, donde $a = 3$. Assim, a equação do plano tangente é:

$$z = \frac{1}{2}x + 3y - \frac{3}{2} \text{ on } x + 6y - 2z = 3$$

10. Seja $f(x,y) = \dfrac{x^4 y}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0)$ e $f(x,y) = 0$, $(x,y) = (0,0)$.

(a) Calcule $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$.

(b) f é diferenciável em $(0,0)$?

(c) f é contínua em $(0,0)$.

Solucão

(a) Temos $f_x(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0$, $f_y(0,0) = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{0-0}{k} = \lim\limits_{k\to 0} 0 = 0$.

(b) Temos $\varepsilon\,(h_1 k) = f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k = \dfrac{h^4 k}{h^2+k^2} - 0 - 0\cdot h - 0\cdot k = \dfrac{h^4 k}{h^2+k^2}\cdot$.

Donde,

$$\frac{\varepsilon\,(h_1 k)}{\|(h,k)\|} = \frac{\frac{h^4 k}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{h^4 k}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = h^2 \cdot \frac{h^2}{h^2+k^2} \cdot \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

onde,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} = 0, \left|\frac{h^2}{h^2+k^2}\right| = \frac{h^2}{h^2+k^2} \leqslant \frac{h^2+k^2}{h^2+k^2} = 1, \left|\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| = \frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{|k|^2}{h^2+k^2}} = \sqrt{\frac{k^2}{h^2+k^2}} \leqslant \sqrt{\frac{h^2+k^2}{h^2+k^2}} = 1.$$

Logo, pelo teorema do anulamento, segue que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{\|(h_1 k)\|} = 0$$

portanto, f é diferenciável em $(0,0)$.

(c) Se f é diferenciável em $(0,0)$, então f contínua em $(0,0)$.

11. Considere a superfície S de equação $z = 2x^2 + 2y^2$.

(a) Determine o ponto $P_0 \in S$, tal que o plano tangente a S em P_0 seja ortogonal ao vetor $V = \left(0, 1, -\frac{1}{6}\right)$.

(b) Escreva a equação do plano tangente referido no item (a).

Solução

(a) a equação do plano tangente aS em $P_0 = (a,b,z(a,b)) = (a,b,2a^2+2b^2)$ é:

$$z = z(a,b) + z_x(a,b)(x-a) + z_y(a,b)(y-b)$$

onde,

$$z_x(a,b) = 4x|_{(a,b)} = 4a \quad \text{e} \quad z_y(a,b) = 4y|_{(a,b)} = 4b$$

Temos então,

$$z = 2a^2 + 2b^2 + 4ax - 4a^2 + 4by - 4b^2$$

ou seja,

$$4ax + 4by - z = 2a^2 + 2b^2$$

Daí, concluímos que $(4a, 4b, -1)$ é um vetor ortogonal ao plano tangente a S em P_0. Como queremos que plano tangente a S em P_0 seja ortogonal ao vetor $V = \left(0, 1, -\frac{1}{6}\right)$, então

$$(4a, 4b, -1) // \left(0, 1, -\frac{1}{6}\right)$$

ou seja, $(4a, 4b, -1) = \lambda \left(0, 1, -\frac{1}{6}\right)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.
Logo, $4a = 0, 4b = \lambda, -1 = \frac{-\lambda}{6}$. Donde, $a = 0, \lambda = 6$ e $b = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.
Então, o ponto P_0 é dado por $P_0 = \left(0, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$.

(b) A equação do plano tangente é:

$$6y - z = \frac{9}{2} \quad \text{ou} \quad 12y - 2z - 9 = 0$$

Exercícios

1. Seja $f(x,y) = \dfrac{3x^5}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(x,y) = 0$ se $(x,y) = (0,0)$.

   (a) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

   (b) f é diferenciável em $(0,0)$? Por quê?

2. Verifique se a função $f(x,y) = x^{\frac{1}{3}} \cos y$ é diferenciável em $(0,0)$.

3. Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico da função $f(x,y) = xe^{x^2-y^2}$ no ponto $(2, 2, f(2,2))$.

4. Encontre o ponto onde o plano tangente ao gráfico da função $f(x,y) = x^2y^2 + 2(x-y)$ é horizontal.

5. Mostre que a recíproca do Teorema 2 é falsa.

Respostas

1. (a) $0; 0$

   (b) É diferenciável em $(0,0)$

2. f não é diferenciável em $(0,0)$, pois não existe $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

3. $z = 9x - 8y; (x,y,z) = (2,2,2) + \lambda(9,-8,-1), \lambda \in \mathbb{R}$

4. $(-1, 1, -3)$

5. A função $f(x,y) = (x^2+y^2)\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$, se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(x,y) = 0$, se $(x,y) = (0,0)$ é diferenciável mas as parciais não são contínuas em $(0,0)$.

Aproximação linear de funções

Objetivos:

- diferencial total; estimação da variação de uma função; cálculo de erro absoluto e relativo;
- aproximação linear de uma função; estimação de valores da função em um ponto;

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida no aberto $D \subset \mathbb{R}^2$, diferenciável em $(a, b) \in D$. Então

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{||(h,k)||} = 0$$

Onde $\varepsilon\,(h, k) = f(a + h, b + k) - f(a, b) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)h - \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)k.$

Diferencial: Se define <u>diferencial de f no ponto (a, b) relativa aos acréscimos h e k</u> como a função

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k = \text{ diferencial de } f \text{ em } (a, b)$$

que depende de h e k.

Se f é diferenciável em (a, b), temos

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{||(h,k)||} \cdot ||(h,k)||$$

$$= \underbrace{\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{||(h,k)||}}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{(h,k)\to(0,0)} ||(h,k)||}_{=0} = 0.$$

Logo,

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) \simeq \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k, \quad \text{se} \quad (h, k) \simeq (0, 0).$$

Pondo $\Delta f = f(a+h, b+k) - f(a, b) =$ varação de f quando se passa de (a, b) para $(a + h, b + k)$, obtemos:

$$\Delta f \simeq df, \text{ se } (h, k) \simeq (0, 0)$$

O valor df também pode ser interpretado como o erro total nos valores de $f(x,y)$ se os incrementos h e k medem o erro na medição dos valores x e y respectivamente. O erro relativo é o quociente $|\dfrac{df}{f(a,b)}|$ e a percentagem de variação é $|\dfrac{df}{f(a,b)}| * 100$%.

Observe-se que na notação de $h = \Delta x$, $k = \Delta y$, a diferencial é

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\Delta x$$

Analogamente, seja $f : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, D aberto em $\mathbb{R}^3$, é uma função de três variáveis com derivadas parciais contínuas em D (logo diferenciável). Para cada $(a,b,c) \in D$, definimos a diferencial de f en (a,b,c) relativa aos acréscimos Δx, Δy, Δz por:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)\Delta z$$

Mostra-se que $\Delta f \simeq df$ se $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \simeq (0,0,0)$.

Observação:

1. Notação clássica de diferencial

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy$$

2. Em funções de uma variável $y = f(x)$, a diferencial é definida como $dy = f'(x)dx$, sendo dx a variável independente.

3. Como $\Delta f \simeq df$, temos que se $df > 0$ (respectivamente $df < 0$), a função aumenta (diminui) quando se passa de (a,b) para $(a+h, b+k)$.

4. Se $df = 0$, então a função não varia quando se passa de (a,b) para $(a+h, b+k)$.

Função linearizada: Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida no aberto $D \subset \mathbb{R}^2$, e $(a,b) \in D$. Se existem as parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$, a função

$$L(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

é bem definida e é chamada de função linearizada de f perto de (a,b).

Se f é diferenciável em (a,b), temos

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - f(a,b) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0$$

e podemos garantir que $f(x,y) \simeq L(x,y)$ para todo (x,y) suficientemente próximo de (a,b).

Observação:

1. A função $L(x,y)$ é usada para estimar valores de $f(x,y)$ quando os mesmos forem complicados de calcular e também quando não se tem uma expressão explícita de f. Por exemplo quando temos apenas dados experimentais numa tabela e desconhecemos a lei ou modelo.

2. A superfície $z = L(x,y)$ é o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a,b,f(a,b))$.

3. $df = L(x,y) - f(a,b)$

Interpretação geométrica da diferencial: Se $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, então $dy = f'(a)dx$, e geometricamente se corresponde com a distancia entre os pontos R e Q da figura abaixo. Em quanto Δy se corresponde com a distancia entre os pontos R e P.

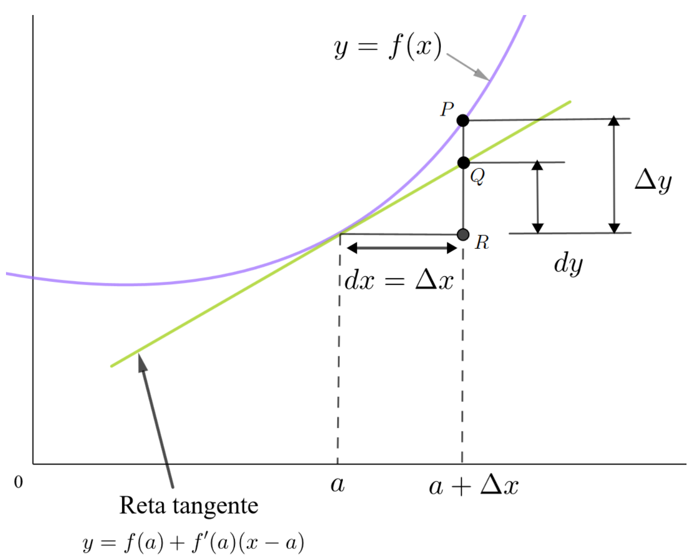


Figure 71: Diferencial de uma função de uma variável

Observe que Δy representa a variação da função $f(x)$ e dy representa a variação da função linearizada de f, $L(x)$ perto do ponto $(a, f(a))$, cujo gráfico é a reta tangente a $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$.

Ora, se $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $z = f(x,y)$, então $dz = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)dy$, e geometricamente corresponde à distancia do ponto $(a+\Delta x, b+\Delta y, f(a,b))$ ao ponto do plano tangente $(a+\Delta x, b+\Delta y, c)$. Ora, o valor Δz se corresponde com a distancia entre os pontos $(a+\Delta x, b+\Delta y, f(a,b))$ e o ponto $(a+\Delta x, b+\Delta y, f(a+\Delta x, b+\Delta y))$ do gráfico $z = f(x,y)$.

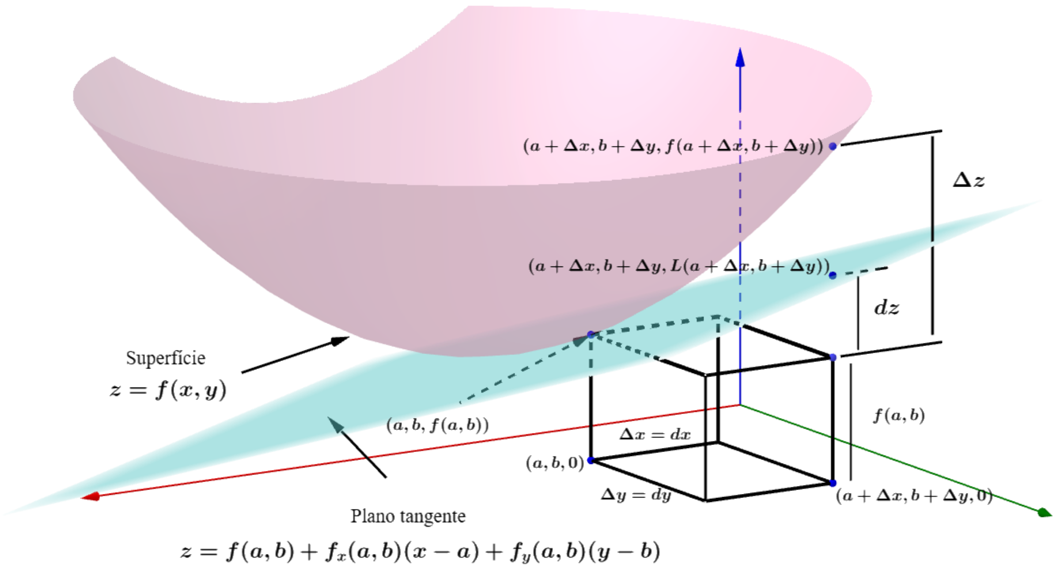


Figure 72: Diferencial de uma função de duas variáveis

Observe que Δz representa a variação da função $f(x, y)$ e dz representa a variação da função linearizada de f, $L(x, y)$ perto do ponto $(a, b, f(a, b))$. Daí $c = L(a+\Delta x, b+\Delta y)$ no ponto de variação no plano tangente $(a + \Delta x, b + \Delta y, c)$.

Exemplos

1. Calcule a diferencial de $z = \ln(x^2 + y^2)$.

   Solução

   Temos
$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{2x}{x^2 + y^2}dx + \frac{2y}{x^2 + y^2}dy$$

2. Seja $z = xe^{x^2-y^2}$. Calcule um valor aproximado para z, correspondente a $x = 1,01$ e $y = 1,002$.

   Solução

   A função $z = xe^{x^2-y^2}$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$, por $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)$ serem contínuas em $\mathbb{R}^2$.

   Sejam $(a, b) = (1, 1), h = 0,01$ e $k = 0,002$. Como $(h, k) \simeq (0, 0)$, Então
$$\Delta z \simeq dz$$
   Onde $\Delta z = z(1.01, 1.002) - z(1, 1) = z(1.01; 1.002) - 1$,
$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}(1, 1)h + \frac{\partial z}{\partial y}(1, 1)k =$$

$$= [e^{x^2-y^2} + x \cdot 2xe^{x^2-y^2}]_{(1,1)} \cdot (0.01) + [x \cdot (-2y)e^{x^2-y^2}]_{(1,1)} \cdot (0.002) =$$

$$= (1+2) \cdot (0,01) + (-2) \cdot (0,002) = 0,03 - 0,004 = 0,026$$

Então, $z(1.01, 1.002) - 1 \simeq 0,026$, ou seja $z(1.01, 1.002) \simeq 1,026$

3. A altura de um cone é $h = 20\ cm$ e o raio da base é $r = 12\ cm$. Calcule um valor aproximado para a variação, ΔV, no volume quando h aumenta de $2\ mm$ e r decresce $1\ mm$. Estime o erro relativo e a percentagem de variação do volume.

   Solução

   O volume do cone de altura h e raio da base r é dado por $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, que é uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$. Sejam $r_0 = 12, h_0 = 20$.

   Como h aumenta de $2\ mm$, então $\Delta h = 0,2$ e como r decresce de $1\ mm$, então $\Delta r = -0,1$. Como $|\Delta r| \simeq 0$ e $|\Delta h| \simeq 0$, então $\Delta V \simeq dV$, onde

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial V}{\partial h}\Delta h = \frac{2}{3}\pi r h\bigg|_{(12,20)} \cdot \Delta r + \frac{1}{3}\pi r^2\bigg|_{(12,20)} \cdot \Delta h$$

$$= \frac{2}{3}\pi \cdot 12 \cdot 20 \cdot (-0,1) + \frac{1}{3}\pi (12)^2 \cdot (0,2)$$

$$= -16\pi + 9,6\pi = -6,4\pi$$

   Assim,

$$\Delta V \simeq -6,4\pi$$

   ou seja, a variação ΔV no volume decresce aproximadamente de $6,4\pi\ cm^3$.

   O erro relativo é, portanto,

$$\left|\frac{dV}{V(12,20)}\right| = \frac{6,4\pi}{1/3\pi \cdot 144 \cdot 20} = 0,007$$

   e a percentagem de variação do volume é de $0,7$%.

4. A altura h de ondas em mar aberto depende da velocidade do vento v e do tempo t durante o qual o vento se manteve naquela intensidade. Os valores da função $h = f(v,t)$ são apresentados na seguinte tabela.

Duração (horas)

Velocidade do vento (km/h)

v \ t	5	10	15	20	30	40	50
40	1,5	2,2	2,4	2,5	2,7	2,8	2,8
60	2,8	4,0	4,9	5,2	5,5	5,8	5,9
80	4,3	6,4	7,7	8,6	9,5	10,1	10,2
100	5,8	8,9	11,0	12,2	13,8	14,7	15,3
120	7,4	11,3	14,4	16,6	19,0	20,5	21,1

Use a tabela para

(a) determinar uma aproximação linear da função altura da onda quando v está próximo de 80 km/h e t está próximo de 20 horas;

Solução

Supondo que a função f é diferenciável, uma aproximação linear da função altura para pontos suficientemente próximos de $(80, 20)$ seria a função

$$L(v,t) = f(80,20) + \frac{\partial f}{\partial v}(80,20)(v-80) + \frac{\partial f}{\partial t}(80,20)(t-20)$$

Ora,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(80,20) = \lim_{h\to 0} \frac{f(80+h,20) - f(80,20)}{h}$$

E podemos estimar esse valor considerando a média das taxas de variação média com, por exemplo, $h_1 = 20$ e $h_2 = -20$. Com efeito,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(80,20) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{f(80+20,20) - f(80,20)}{20} + \frac{f(80-20,20) - f(80,20)}{-20}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{12.2-8.6}{20} + \frac{5.2-8.6)}{-20}\right) = \frac{1}{2}(0.17+0.18) = 0.175.$$

Analogamente,

$$\frac{\partial f}{\partial t}(80,20) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{f(80,20+10) - f(80,20)}{10} + \frac{f(80,20-5) - f(80,20)}{-5}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{9.5-8.6}{10} + \frac{7.7-8.6)}{-5}\right) = \frac{1}{2}(0.09+0.18) = 0.135.$$

Assim, a aproximação linear esperada seria

$$L(v,t) = 8.6 + 0.175(v-80) + 0.135(t-20)$$

(b) estimar a altura das ondas quando está ventando por 24 horas a 84 km/h.

Solução
Considerando a linearização do item (a),

$$f(84,24) \approx L(84,24) = 8.6 + 0.175(84-80) + 0.135(24-20) = 9.84$$

Portanto, as ondas teriam uma altura de aproximadamente 9.84 metros.

Exercícios

1. Seja $f(x,y) = 1 + \ln(x^2+y^2)$. Determine:

   (a) D_f

   (b) $Im(f)$

   (c) Curvas de nível

   (d) G_f

   (e) o plano tangente e a reta normal ao G_f no ponto $(1,0,1)$

   (f) Um valor aproximado para $f(0.99, 0.01)$

   (g) O conjunto dos pontos de diferenciabilidade da função

$$g(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)(f(x,y)-1) & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2. Dê um valor aproximado de $\sqrt{(0.01)^2 + (3.98)^2 + (2.99)^2}$. Obs: Considere a função $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

3. Determine o erro relativo máximo (aproximado) no cálculo do período T de um pêndulo simples, através da fórmula $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, sendo o erro relativo em l igual a 1% e em g igual a 3%.

4. O ângulo central de um setor circular é $80°$ e o raio é $20\ cm$ e deseja-se reduzir o ângulo de $1°$. Qual deve ser o acréscimo no raio para que a área fique inalterada?

5. A sensação térmica $W(T,v)$ depende da velocidade do vento v e da temperatura T. Use os dados da seguinte tabela para

   (a) dar uma equação aproximada da lei $W(T,v)$ que determina a sensação térmica a velocidade do vento próxima a 10 milhas/h e temperatura próxima a 30^oF.

   (b) estimar a sensação térmica se a velocidade do vento for de 11milhas/h e a temperatura for 29^oF.

Temperatura T (F°)

Velocidade do vento v (milhas/h)	10,00	30,00	50,00	70,00
20,00	10,00	30,00	50,00	70,00
40,00	5,00	15,00	25,00	35,00
60,00	3,33	10,00	16,67	23,33
80,00	2,50	7,50	12,50	17,50

6. Um modelo para a área da superfície do corpo humano é dado por

$$S = 72,09w^{0,425}h^{0,725},$$

onde w é o peso (em quilogramas), h é a altura (em centímetros) e S é a medida em centímetros quadrados. Se os erros nas medidas de uma pessoa, w=80kg e h=175cm, forem no máximo de 2%, utilize as diferenciais para estimar o erro máximo cometido no cálculo da superfície do corpo.

7. A temperatura do ponto (x, y) de uma chapa é dada por $T(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2 - 12}$.

   (a) Determine o domínio de $T(x, y)$ e represente-o no plano xy.

   (b) Determine a equação, da isoterma que contém o ponto $(2, 3)$ e faca o seu esboço.

   (c) Determine o plano $z = ax + by + c$ que melhor se aproxima do gráfico de $T(x, y)$ no ponto $(2, 3)$.

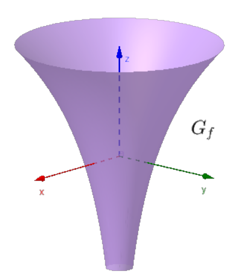
   (d) Calcule um valor aproximado da temperatura em $(1.01, 2.99)$.

Respostas

1. (a) $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

   (b) $\mathbb{R}$

   (c) Circunferência de Centro $(0, 0)$ e raio $\sqrt{e^{k-1}}$



   (d)

   (e) $z = 1 + 2(x - 1); (x, y, z) =$

$(1,0,1)+\lambda(2,0,-1), \lambda \in \mathbb{R}$

(f) 0.98

(g) $\mathbb{R}^2$

2. 4.978

3. 2%

4. $\Delta r \simeq 0.25\ cm$

5. (a) $W(T,v) \simeq 21 + 1,2(T-30) + 0,6(v-10)$.

   (b) $W(29,11) \simeq 19,2$

6. $2,3$%

7. (a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 > 12\}$

   (b) $k = 0 \Rightarrow c_0 : x^2+y^2 = 13$

   (c) $z = 2x+3y-13$

   (d) $-2.01 - 0.01$

Regra da Cadeia e Derivação Implícita

Objetivos:

- vetor gradiente;
- regra da cadeia: derivação de composição de funções;
- derivação implícita; teorema da função implícita.

Vetor Gradiente

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ que admite derivadas parciais em $(a, b) \in D$. O vetor

$$\nabla(a, b) = gradf(a, b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right)$$

é dito (vetor) gradiente de f em (a, b).

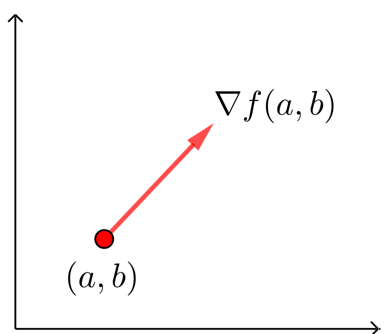


Figure 73: Vetor gradiente

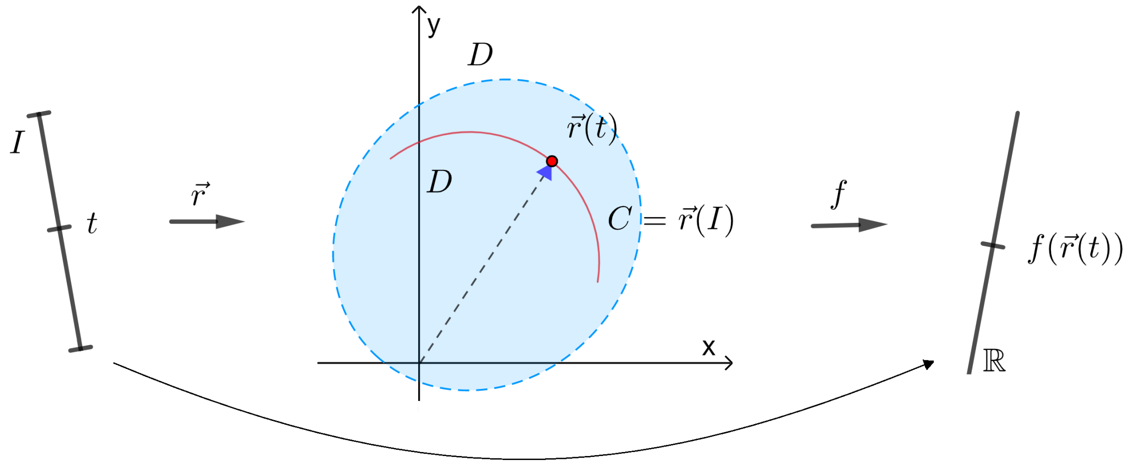
Seja $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ que admite derivadas parciais em (a, b, c). Então

$$\nabla f(a, b, c) = gradf(a, b, c) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c), \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c)\right)$$

Teorema: Regra da Cadeia (derivada de função composta)

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, D aberto, $\vec{r} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, tais que $\vec{r}(t) \in D$, para todo $t \in I$. Se $\vec{r}$ for diferenciável em t_0 e f diferenciável em $\vec{r}(t_0)$, então a composta $g(t) = f(\vec{r}(t))$ é diferenciável em t_0 e

$$g'(t_0) = \nabla f(\vec{r}(t_0)) \cdot \vec{r}'(t_0)$$



$$g = f \circ \vec{r} : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto \; g(t) = f(\vec{r}(t))$$

Figure 74: Composição de funções

Observações

(I) Se f for diferenciável em $D \subset \mathbb{R}^n$ e $\vec{r}$ diferenciável em $I \subset \mathbb{R}$, então $g(t) = f(\vec{r}(t))$ é diferenciável em I e $g'(t) = \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)$ para todo $t \in I$.

(II) Para $n = 2$, temos $z = f(x, y)$, $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ portanto,

$$\nabla f\,(\vec{r}(t)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\right), \quad \vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t)) = \left(\frac{dx}{dt}(t), \frac{dy}{dt}(t)\right).$$

Então,

$$g'(t) = \frac{dg}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), g(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t)$$

ou

$$\frac{dg}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\frac{dy}{dt}(t)$$

ou, abreviadamente,

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Por abuso de notação, as vezes se escreve $g'(t)$ como $z'(t)$, $\dfrac{dz}{dt}$ ou $\dfrac{df}{dt}$.

(III) Para $n = 3$, temos $g(t) = f(\vec{r}(t)) = f(x(t), y(t), z(t))$.

Logo,

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t), z(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t), z(t))y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(x(t), y(t), z(t))z'(t)$$

ou, abreviadamente,

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Por abuso de notação, as vezes se escreve $g'(t)$ como $w'(t)$, $\dfrac{dw}{dt}$ ou $\dfrac{df}{dt}$.

Uma consequência da regra da cadeia

(I) Seja $z = f(x, y)$ diferenciável em $D \subset \mathbb{R}^2$, D aberto. Sejam $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ diferenciáveis no aberto $E \subset \mathbb{R}^2$, tais que $(x(u, v), y(u, v)) \in D$. Então, a composta

$$F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$$

é diferenciável em $E \subset \mathbb{R}^2$ e

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v))\frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v))\frac{\partial y}{\partial u}(u, v)$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v))\frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v))\frac{\partial y}{\partial v}(u, v)$$

ou, abreviadamente,

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial uv} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial xv}$$

(II) Sejam $w = f(x, y, z)$ diferenciável em $D \subset \mathbb{R}^3$, D aberto, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ diferenciáveis no aberto $E \subset \mathbb{R}^2$, tais que $(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \subset D$. Então, a composta

$$\omega = f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

é diferenciável em $E \subset \mathbb{R}^2$ e, abreviadamente,

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$$

Derivação implícita

Definição 1: Uma função $y = g(x), x \in I$ é definida implicitamente pela equação $F(x,y) = 0$ se $F(x, g(x)) = 0$, $\forall x \in I$.

Supondo F e g são diferenciáveis, temos pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x)) \cdot g'(x) = 0$$

Supondo que $\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x)) \neq 0 \quad \forall x \in I$, temos

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))}, \quad \forall x \in I$$

ou, equivalentemente,

$$g'(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x)), \quad \forall x \in I.$$

Problema 1: Encontrar condições para que a equação $F(x, y) = 0$ defina implicitamente uma função diferenciável $y = g(x)$.

A solução do Problema 1 é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 1 (da função implícita): Seja $F : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 no conjunto aberto D. Seja $(x_0, y_0) \in D$, tal que

(i) $F(x_0, y_0) = 0$

(ii) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Então, existe uma vizinhança I de x_0 e uma função de classe C^1, $g : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $g(x_0) = y_0$ e $F(x, g(x)) = 0$, $\forall x \in I$.

Definição 2: Uma função $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D$ é definida implicitamente pela equação $F(x, y, z) = 0$ se $F(x, y, g(x, y)) = 0$, $\forall (x, y) \in D$.

Supondo F e g diferenciáveis, temos pela regra da cadeia:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, g(x, y))\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, g(x, y))\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y))\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0 \\[2ex] \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, g(x, y))\frac{dx}{dy} + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, g(x, y))\frac{dy}{dy} + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y))\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y))\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,g(x,y)) \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y)\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,g(x,y)) \end{cases}$$

Supondo $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y)) \neq 0$, $\forall (x,y) \in D$, temos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,g(x,y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y))}, \quad \forall (x,y) \in D \\[4ex] \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,g(x,y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y))}, \quad \forall (x,y) \in D \end{cases}$$

ou, equivalentemente,

$$\nabla g(x,y) = -\left(\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y))\right)^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)_{(x,y,g(x,y))}, \quad \forall (x,y) \in D$$

Problema 2: Em que condições a equação $F(x,y,z) = 0$ define implicitamente uma função diferenciável $z = g(x,y)$?

A solução do Problema 2 é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 2 (da função implícita): Seja $F : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 no conjunto aberto D. Seja $(x_0,y_0,z_0) \in D$, tal que

(i) $F(x_0,y_0,z_0) = 0$;

(ii) $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \neq 0.$

Então, existe uma vizinhança V de (x_0,y_0) e uma função de classe C^1, $g : V \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $g(x_0,y_0) = z_0$ e $F(x,y,g(x,y)) = 0$, $\forall (x,y) \in U$.

Observação

(I) O gráfico das função $y = g(x)$ dada pelo Teorema 1 da função implícita está incluído na curva de nível $F(x,y) = 0$.

(I) O gráfico das função $z = g(x,y)$ dada pelo Teorema 2 da função implícita está incluído na superfície de nível $F(x,y,z) = 0$.

Exemplos

1. Seja $f(x,y) = 2\,\text{arctan}\,\dfrac{x}{y}$. Calcule $\nabla f(1,1)$.

   Solução

   Temos $\nabla f(x,y) = \left(\dfrac{2 \cdot \frac{1}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}}, \dfrac{-2\frac{x}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}} \right) = \left(\dfrac{2y}{x^2+y^2}, \dfrac{-2x}{x^2+y^2} \right)$.

   Assim, $\nabla f(1,1) = (1,-1)$.

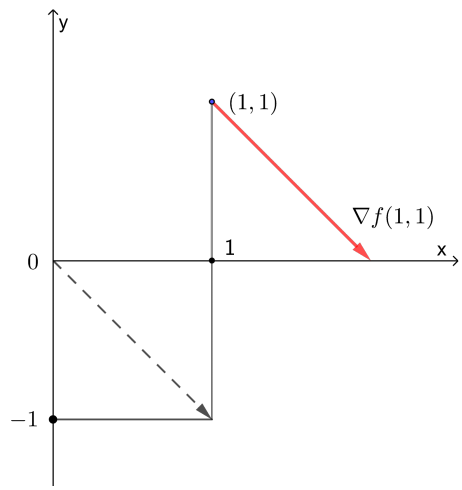


Figure 75: Vetor gradiente de $f(x,y) = 2\,\text{arctan}\,\dfrac{x}{y}$ no ponto $(1,1)$

2. Seja $f(x,y,z) = \sqrt{2x^2+3y^2+4z^2}$. Calcule $\nabla f(-1,1,1)$.

   Solução

   Temos $\nabla f(x,y,z) = \left(\dfrac{4x}{2\sqrt{2x^2+3y^2+4z^2}}, \dfrac{6y}{2\sqrt{2x^2+3y^2+4z^2}}, \dfrac{8z}{2\sqrt{2x^2+3y^2+4z^2}} \right)$.

   Assim, $\nabla f(-1,1,1) = \left(-\frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}\right)$.

3. Seja $g(t) = f(3\,\text{sen}\,t, e^{t^2})$.

   (a) Expresse $g'(t)$ em termos das derivadas parciais de f.

   (b) Calcule $g'(0)$, admitindo que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \frac{1}{3}$.

   Solução

   (a) Temos $g(t) = f(x,y)$ com $x = 3\,\text{sen}\,t$, $y = e^{t^2}$. Pela regra da cadeia, temos:

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)(3\cos t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\left(2te^{t^2}\right)$$

(b) Temos

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(0), y(0))(3\cos 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(0), y(0)) \cdot 0 = 3\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1.$$

4. Suponha que, para todo t, $f(3t, t^3) = \arctan t$, onde $f(x, y)$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

(a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(3,1)$, admitindo que $\frac{\partial f}{\partial y}(3,1) = \frac{1}{2}$.

(b) Determine o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(3, 1, f(1, 3))$.

Solução

(a) Seja $g(t) = f(x, y)$, com $x = 3t, y = t^3$. Pela regia da cadeia, temos para todo t :

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{3} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{3t^2} = 3\frac{\partial f}{\partial x}\left(3t, t^3\right) + 3t^2 \frac{\partial f}{\partial y}\left(3t, t^3\right).$$

Como $f(3t, t^3) = \arctan t$, então $g(t) = \arctan t$. Derivando em relação a t, temos para todo t, $g'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$, ou seja,

$$3\frac{\partial f}{\partial x}\left(3t, t^3\right) + 3t^2 \frac{\partial f}{\partial y}\left(3t, t^3\right) = \frac{1}{1-t^2}.$$

Para $t = 1$, temos:

$$3\frac{\partial f}{\partial x}(3,1) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(3,1) = \frac{1}{2}.$$

Como $\dfrac{\partial f}{\partial y}(3,1) = \dfrac{1}{2}$, então, $3\dfrac{\partial f}{\partial x}(3,1) + \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2}$, donde $\dfrac{\partial f}{\partial x}(3,1) = -\dfrac{1}{3}$.

(b) A equação do plano tangente é :

$$z = f(3,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(3,1)(x-3) + \frac{\partial f}{\partial y}(3,1)(y-1),$$

onde $f(3,1) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$. Então, temos

$$z = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}(x-3) + \frac{1}{2}(y-1).$$

5. A curva C parametrizada por $\vec{r}(t) = (2t, t^2, z(t))$ está contida no gráfico de $z = f(x, y)$. Sabe-se que $f(2, 1) = 3$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = 1$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = -1$. Determine a equação da reta tangente a C no ponto $\vec{r}(1)$.

   Solução

   A equação da reta tangente a C em $\vec{r}(1)$ é dada por:

$$(x, y, z) = \vec{r}(1) + \lambda\vec{r}'(1), \lambda \in \mathbb{R}.$$

   Como $\vec{r}(t) = (2t, t^2, z(t))$ está contida no gráfico de $z = f(x, y)$, então $z(t) = f(2t, t^2)$, e portanto, $z(1) = f(2, 1) = 3$. Logo, $\vec{r}(1) = (2, 1, 3)$. Temos $\vec{r}'(t) = (2, 2t, z'(t))$, donde $\vec{r}'(1) = (2, 2, z'(1))$.

   Como $z = f(x, y)$, com $x = 2t$, $y = t^2$, então, pela regra da cadeia, temos

$$z'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=2} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{=2t} = 2\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2t\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

   donde,

$$z'(1) = 2\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 0.$$

   Portanto, $\vec{r}'(1) = (2, 2, 0)$. Assim, a equação da reta tangente é:

$$(x, y, z) = (2, 1, 3) + \lambda(2, 2, 0), \lambda \in \mathbb{R}.$$

6. A pressão P (em kilopascals), volume V (em litros) e temperatura T (em kelvins) de um mol de um gás ideal relacionam-se pela equação $PV = 8,31T$. Determine a taxa de variação da pressão quando a temperatura é $300\ K$ e está aumentando com a taxa de $0,1\ K/s$ e o volume é $100\ L$ e está aumentando com a taxa de $0,2\ L/s$.

   Solução

   Das hipóteses sabemos que quando $T = 300$, $\dfrac{dT}{dt} = 0,1$. E que quando $V = 100$, $\dfrac{dV}{dt} = 0,2$.

   Considere $P(V, T) = \dfrac{8,31\,T}{V}$. Aplicando a regra da cadeia:

$$\frac{dP}{dt} = \left.\frac{\partial P}{\partial V}\frac{dV}{dt} + \frac{\partial P}{\partial T}\frac{dT}{dt}\right|_{\substack{T=300\\V=100}} = \frac{-8,3T}{V^2}\Big|_{\substack{T=300\\V=100}} \cdot 0,2 + \frac{8,3}{V}\Big|_{\substack{T=300\\V=100}} \cdot 0,1 =$$

$$= \frac{3 \cdot (-8,31)}{100} \cdot 0,2 + \frac{8,31}{100} \cdot 0,1 = 0,05 + 0,01 = 0,06\ KPas/s$$

7. Seja $z = f\left(u^2 - v^2, 2uv\right)$, onde $f(x, y)$ é diferenciável. Expresse $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ em termos das derivadas parciais de f.

Solução

Temos $z = f(x, y)$, onde $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$. Pela regra da cadeia, temos

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\underbrace{\frac{\partial x}{\partial u}}_{2u} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\underbrace{\frac{\partial y}{\partial u}}_{2v} = 2u\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2v\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

$$= 2u\frac{\partial f}{\partial x}\left(u^2 - v^2, 2uv\right) + 2v\frac{\partial f}{\partial y}\left(u^2 - v^2, 2uv\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\underbrace{\frac{\partial x}{\partial v}}_{-2v} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\underbrace{\frac{\partial y}{\partial v}}_{2u} = -2v\frac{\partial f}{\partial x}\left(u^2 - v^2, 2uv\right)$$

$$+2u\frac{\partial f}{\partial y}\left(u^2 - v^2, 2uv\right).$$

8. Mostre que a equação $x^2y + 3y^3x^4 = 4$ define implicitamente uma função $y = g(x)$ no ponto $(1, 1)$. Calcule $g'(1)$.

Solução

Seja $F(x, y) = x^2y + 3y^3x^4 - 4$ que é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$. Temos:

(i) $F(1, 1) = 1 + 3 - 4 = 0$;

(ii) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(1, 1) = [x^2 + 9y^2x^4]_{(1,1)} = 1 + 9 = 10 \neq 0.$

Logo, pelo teorema da função implícita, existe uma vizinhança I de 1 e uma função de classe C^1, $g : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $g(1) = 1$ e $F(x, g(x)) = 0$, $\forall x \in I$.

E aplicando a regra da cadeia:

$$g'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))}, \quad \forall x \in I$$

Logo,

$$g'(1) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(1,1)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(1,1)} = -\frac{14}{10} = -\frac{7}{5},$$

pois $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 2xy + 12y^3x^3$, daí $\dfrac{\partial F}{\partial x}(1, 1) = 2 + 12 = 14$.

9. Mostre que a equação $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4$ define uma função implícita diferenciável $z = g(x, y)$ no ponto $(1, 1, 2)$. Calcule $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1, 1)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1, 1)$.

   Solução Seja $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 4$ que é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$. Temos

   (i) $F(1, 1, 2) = 1 + 1 + 8 - 6 - 4 = 0$;

   (ii) $\dfrac{\partial F}{\partial z}(1, 1, 2) = [3z^2 - 3xy]_{(1,1,2)} = 12 - 3 = 9 \neq 0$.

   Logo, pelo teorema da funca implícita, existe uma vizinhança V de $(1, 1)$ e uma função de classe C^1, $g : V \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $g(1, 1) = 2$ e $F(x, y, g(x, y)) = 0$, $\forall (x, y) \in V$.

   E aplicando a regra da cadeia:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y, g(x, y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y))}, \quad \forall (x, y) \in D \\[4ex] \dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y, g(x, y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y))}, \quad \forall (x, y) \in D \end{cases}$$

   Portanto,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(1, 1, 2)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(1, 1, 2)} = -\dfrac{[3x^2 - 3yz]_{(1,1,2)}}{9} = \dfrac{1}{3} \\[4ex] \dfrac{\partial g}{\partial y}(1, 1) = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(1, 1, 2)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(1, 1, 2)} = -\dfrac{[3y^2 - 3xz]_{(1,1,2)}}{9} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Exercícios

1. Suponha que para todo t, $f\left(t^2, 2t\right) = t^3 - 3t$, onde $f(x, y)$ é diferenciável. Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = -\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$.

2. Admita que para todo (x, y), $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$, onde $f(x, y)$ é diferenciável. Mostre que $g(t) = f\left(t, \frac{2}{t}\right)$, $t > 0$ é constante.

3. A pressão de $1\ mol$ de um gás ideal está aumentando em uma taxa de $0,05\ kPa/s$ e a temperatura está aumentando em uma taxa de $0,15\ K/s$. Use a equação $PV = 8,31\,T$ para determinar a taxa de variação do volume quando a pressão for $20\ kPa$ e a temperatura for $320\ K$.

4. Seja $F(x,y,z) = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}\right)$. Mostre que $x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} = 0$.

5. Seja $g(x,y) = xf\left(x^2+y, 2y, 2x-y\right)$, onde fé diferenciável. Expresse $\frac{\partial g}{\partial x}$ e $\frac{\partial g}{\partial y}$ em termos das derivadas parciais de f.

6. Suponha que $f(x,y)$ é uma função de classe C^1, tal que $\frac{\partial f}{\partial y}(2,-3) = -1$. Sabe-se que um ponto se desloca sobre o gráfico de $z = f(x,y)$, ao longo de uma curva $\vec{r}(t) = (2\,\mathbf{sen}\,t, 7\,\mathbf{cos}\,t - 3, z(t))$, onde t representa o tempo. Determine o vetor velocidade no instante em que suas coordenadas são $(2,-3,6)$.

7. Seja $F(r,\theta) = f(x,y)$, onde $x = r\,\mathbf{cos}\,\theta, y = r\,\mathbf{sen}\,\theta$, sendo $f(x,y)$ diferenciável. Verifique que
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\mathbf{cos}\,\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) + \mathbf{sen}\,\theta\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta).$$

8. Se $u = x^m f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{z}, \frac{z}{x}\right)$, onde f é diferenciável. Mostre que $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = mu$.

9. Seja $\omega = f(x,y)$, onde f é diferenciável, se $x = r\,\mathbf{cos}\,\theta, \quad y = r\,\mathbf{sen}\,\theta$, mostre que
$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial \omega}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \omega}{\partial \theta}\right)^2.$$

10. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em $P_0 = (0,0,0)$, tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) = 0$, $f(P_0) = 1$. Defina $g(u,v) = f\left(u-v, u^2-v, 3v-3\right)$ e calcule a equação do plano tangente ao gráfico de g no ponto $(1,1,1)$.

11. Suponha que a equação $\mathbf{ln}\left(x^2+y^2-1\right) + e^{xz} = 1$ define implicitamente uma função $z = f(x,y)$ diferenciável em $(\sqrt{2},0)$.
    (a) Calcule $\nabla f(\sqrt{2},0)$.
    (b) Calcule a equação do plano tangente à superfície $z = f(x,y)$ no ponto $(\sqrt{2},0,f(\sqrt{2},0))$.
    (c) Aproxime o valor de $f(1.3, 0.1)$. Considere $\sqrt{2} = 1,41$.

Respostas

1. sem resposta

2. sem resposta

3.

4. sem resposta

5. $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = f(u,v,\omega) + x\left[2x\frac{\partial f}{\partial x}(u,v,\omega) + 2\frac{\partial f}{\partial z}(u,v,\omega)\right]$
   $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x\left[\frac{\partial f}{\partial x}(u,v,\omega) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(u,v,\omega) - \frac{\partial f}{\partial z}(u,v,\omega)\right]$,
   onde $u = x^2 + y, v = 2y, \omega = 2x - y$.

6. 7

7. sem resposta

8. sem resposta

9. sem resposta

10. $x - 7y - 16z = -28$

11. (a) $\nabla f(\sqrt{2}, 0) = (-2, 0)$
    (b) $z = -2(x - \sqrt{2})$
    (c) $f(1.3, 0.1) \approx -2(1.3 - 1.41) = -0.22$

Derivadas Direcionais. Propriedades do Vetor Gradiente.

Objetivos:

- definição de derivada direcional; derivada direcional como taxa de variação;
- interpretação geométrica da derivada direcional;
- propriedades do vetor gradiente.

Derivada direcional

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, D aberto, e $(a, b) \in D$.

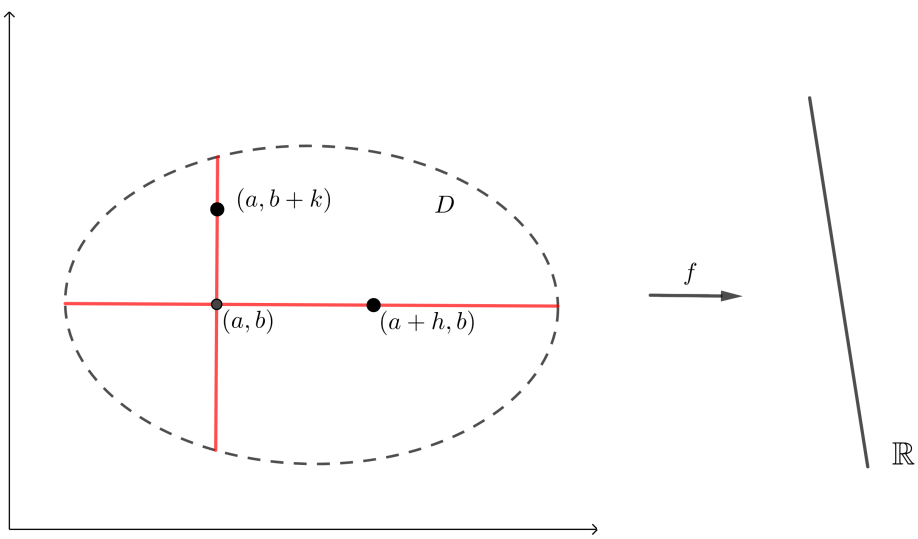


Figure 76: Segmento interseção $C_2 : x = a, y \in I_2$ e $C_1 : y = b, x \in I_1$

Vimos no capítulo de derivadas parciais, que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}, \text{ se existir o limite,}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{k\to 0} \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k}, \text{ se existir o limite.}$$

Como $\dfrac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$ é a taxa de variação média de f quando se passa de (a,b) para $(a+h,b)$, então $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ é a taxa de variação de f em (a,b) na direção do eixo x ou na direçãõ do vetor unitário $\vec{i}$.

Analogamente, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ é a taxa de variação de f em (a,b) na direção do eixo y ou na direção do vetor unitário $\vec{j}$.

Pergunta natural: Seja $\vec{u}=(u_1,u_2)$ um vetor unitário em $\mathbb{R}^2$, isto é, $u_1^2+u_2^2=1$. Qual é a taxa de variação de f em (a,b), na direção do vetor $\vec{u}=(u_1,u_2)$?

Solução

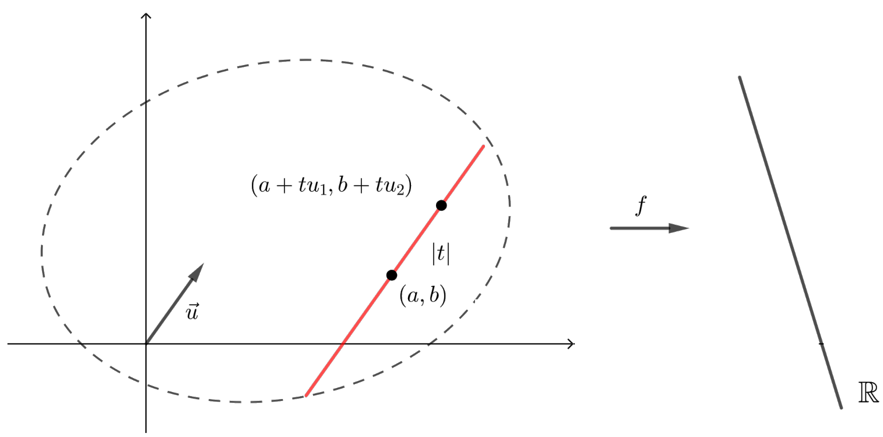


Figure 77: Segmento interseção $C:(x,y)=(a+tu_1,b+tu_2)\,,t\in I$

Seja r a reta que passa pelo ponto (a,b) e é paralela ao vetor $\vec{u}=(u_1,u_2)$. Uma equação paramétrica dela é:

$$r:(x,y)=(a,b)+t\vec{u}=(a,b)+t\,(u_1,u_2)=(a+tu_1,b+tu_2)\,,t\in\mathbb{R}$$

Seja $C\subset$ reta r, tal que $C\subset D$. Então, temos $C:(x,y)=(a+tu_1,b+tu_2)\,,t\in I$.

Observe que I deve conter o 0 para garantir que $(a,b)\in C$. Aliás,

$$\|(x,y)-(a,b)\|=\|t\vec{u}\|=|t|\underbrace{\|\vec{u}\|}_{1}=|t|.$$

Logo, podemos calcular a taxa de variação média de f em (a,b) quando se passa de (a,b) para $(x,y)=(a+tu_1,b+tu_2)$ como sendo:

$$\frac{f\,(a+tu_1,b+tu_2)-f\,(a,b)}{\|(x,y)-(a_1b)\|}=\frac{f\,(a+tu_1,b+tu_2)-f(a,b)}{|t|}.$$

Donde a taxa de variação (instantânea) de f em (a,b) na direção do vetor unitário $\vec{u}$ ou a derivada direcional de f em (a,b) na direção do vetor unitário $\vec{u}=(u_1,u_2)$ é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a,b) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(a+tu_1, b+tu_2\right) - f(a,b)}{t},$$

se o limite existir.

Observações

(I) Na direção do eixo OX, $\vec{u} = \vec{\imath} = (1,0)$, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\imath}}(a,b) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t,b) - f(a,b)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$$

(II) Na direção do eixo OY, $\vec{u} = \vec{\imath} = (0,1)$, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\jmath}}(a,b) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a,b+t) - f(a,b)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

(III) Se $f : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(a,b,c) \in D$ e $\vec{u} = (a_1, u_2, u_3)$ é um vetor unitário, então

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a,b,c) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(a+tu_1, b+tu_2, c+tu_3\right) - f(a,b,c)}{t},$$

se o limite existir.

(IV) Da definição de $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a,b)$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a,b) \simeq \frac{f(a+tu_1, b+t_2) - f(a,b)}{t}, \quad \text{se} \quad t \simeq 0$$

ou

$$f(a+tu_1, b+tu_2) - f(a,b) \simeq t\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a,b), \quad \text{se} \quad t \simeq 0$$

Logo, também poderíamos usar a derivada direcional para aproximar valores da função f em pontos (x,y) próximos a (a,b) na direção do vetor $\vec{u}$.

$$f(x,y) \simeq f(a,b) + t\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a,b), \quad (x,y) = (a+tu_1, b+tu_2), \quad t \simeq 0$$

Interpretação geométrica de $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a,b)$: Geometricamente, estamos fazendo a restrição de f sobre a reta $r : (x,y) = (a+tu_1, b+tu_2)$ e olhando para a curva interseção do gráfico de f e o plano $(x,y,z) = (a+tu_1, b+tu_2, s)$, $t \in I$, $s \in \mathbb{R}$. Dessa maneira, o número $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a,b)$ é o coeficiente angular da reta tangente à curva interseção no ponto $(a,b,f(a,b))$ relativo à reta r. Isto é $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a,b) = \tan\alpha$.

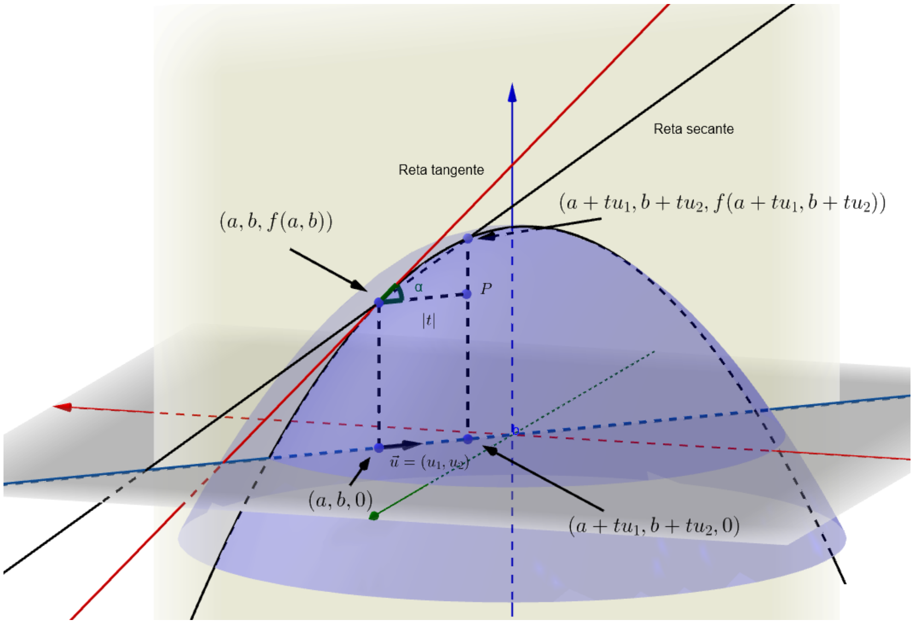


Figure 78: Interpretação geométrica das derivadas direcionais

Propriedades do vetor gradiente:

Teorema Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, D aberto, diferenciável em $(a, b) \in D$. Seja $\vec{u} = (u_1, u_2)$ um vetor unitário. Então

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b) = \nabla f(a, b) \cdot \vec{u}$$

Demonstracão:

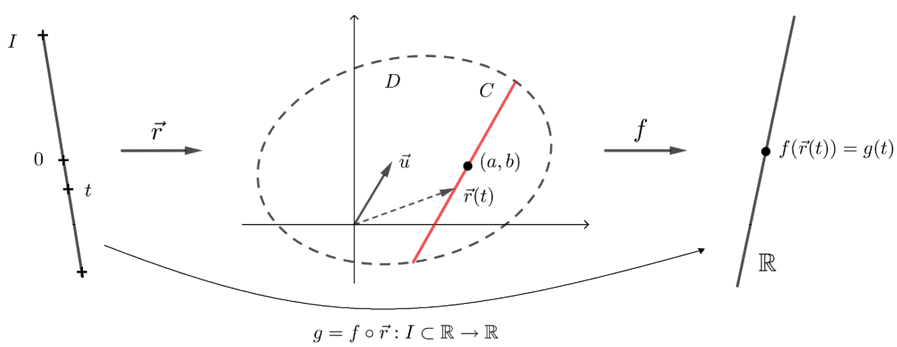


Figure 79: Composição de f com a parametrização do segmento $C : (x, y) = (a + tu_1, b + tu_2), t \in I$

Uma parametrização de C é dada por

$$C : \vec{r}(t) = (a + tu_1, b + tu_2), t \in I \quad \text{(contendo 0)}$$

Observe que $\vec{r}$ é diferenciável em I e $\vec{r}(0) = (a, b)$. Temos a função composta $g(t) = f(\vec{r}(t)) = f(a + tu_1, b + tu_2)$. Pela regra da cadeia, temos

$$g'(0) = \nabla f(\vec{r}(0)) \cdot \vec{r}\,'(0) = \nabla f(a, b) \cdot (u_1, u_2) = \nabla f(a, b) \cdot \vec{u}.$$

Mas

$$g'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t)-g(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(a+tu_1, b+tu_2\right) - f(a,b)}{t} = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a,b).$$

Logo, $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a,b) = \nabla f(a,b)\cdot \vec{u}$, como queríamos demonstrar.

Observação:

(I) Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, D aberto, diferenciável em $(a,b,c) \in D$ e $\vec{u}$ um vetor unitário de $\mathbb{R}^3$, então

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a,b,c) = \nabla f(a,b,c)\cdot \vec{u}$$

(II) Seja f diferenciável em X_0, tal que $\nabla f\left(X_0\right) \neq \overrightarrow{0}$. Então,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}\left(X_0\right) = \nabla f\left(X_0\right)\cdot \vec{u} = \left\|\nabla f\left(X_0\right)\right\| \underbrace{\|\vec{u}\|}_{1} \cos\alpha = \left\|\nabla f\left(x_0\right)\right\| \cos\alpha,$$

onde $\alpha \in [0,\pi]$ é o ângulo entre os vetores $\nabla f\left(X_0\right)$ e $\vec{u}$.

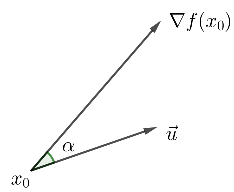


Figure 80: Ângulo entre o vetor gradiente e o vetor unitário

Como $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$, então $-\left\|\nabla f\left(X_0\right)\right\| \leqslant \dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}\left(X_0\right) \leqslant \left\|\nabla f\left(X_0\right)\right\|$.

Conclusão: O valor máximo de $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}\left(X_0\right)$ é igual a $\left\|\nabla f\left(X_0\right)\right\|$ e ocorre quando $\alpha = 0$ ou quando $\vec{u}$ for o versor de $\nabla f\left(X_0\right)$. Já o valor mínimo de $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}\left(X_0\right)$ é igual a $-\left\|\nabla f\left(X_0\right)\right\|$ e ocorre quando $\vec{u} = -\dfrac{\nabla f\left(X_0\right)}{\left\|\nabla f\left(X_0\right)\right\|}$.

Portanto, estando em X_0, é na direção do vetor $\nabla f\left(x_0\right)$ que f cresce mais rapidamente. E é na direção de $-\nabla f\left(x_0\right)$ que f decresce mais rapidamente.

Interpretação geométrica do vetor gradiente Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em $(a,b) \in D$ (aberto), tal que $\nabla f(a,b) \neq (0,0)$. Seja $k = f(a,b)$. Considere a curva de nível de f, no nivel k, que passa por (a,b):

$$C_k:\ f(x,y) = k.$$

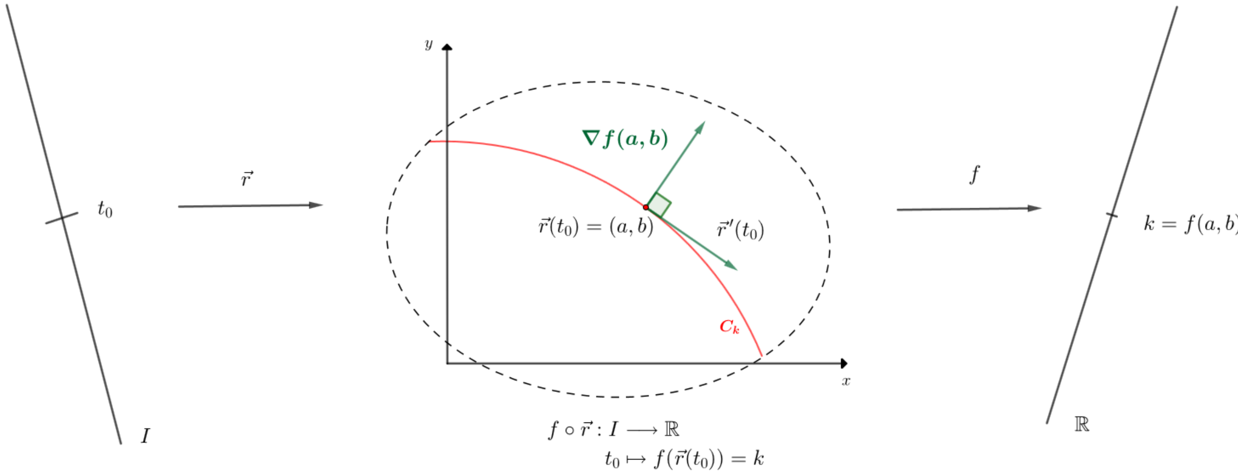


Figure 81: O vetor gradiente é perpendicular à curva de nível

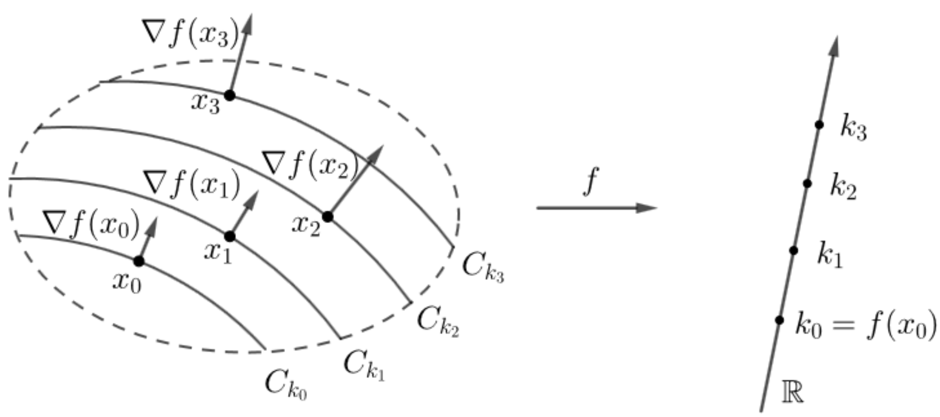


Figure 82: O vetor gradiente em várias curvas de nível

Seja $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t_0 \in I$, uma parametrização diferenciável de C_k. Seja $t_0 \in I$, tal que, $\vec{r}\,(t_0) = (a, b)$. Temos a função composta $f(\vec{r}(t)) = k$, para todo $t \in I$. Derivando em relação a t, temos $(f(\vec{r}(t)))' = 0$, para todo t.

Aplicando a regra da cadeia, temos $\nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = 0$, para todo t.

Em particular

$$\nabla f\,(\vec{r}\,(t_0)) \cdot \vec{r}'\,(t_0) = 0$$

ou

$$\nabla f(a, b), \vec{r}'\,(t_0) = 0$$

Como $\nabla f(a, b) \neq \overrightarrow{0}$, então $\nabla f(a, b) \perp \vec{r}\,(t_0)$.

Conclusão: se $\nabla f(a,b) \neq \overrightarrow{0}$, então $\nabla f(a,b) \perp C_k$ em (a,b), i.e., $\nabla f(a,b)$ é normal à curva de nível de f que passa por (a,b).

Portanto temos que:

Equação da reta tangente à curva de nível de f no ponto (a,b)

$$[(x,y)-(a,b)]\cdot\nabla f(a,b)=0$$

Equação da reta normal à curva de nível de f no ponto (a,b)

$$(x,y)=(a,b)+\lambda\nabla f(a,b), \lambda\in\mathbb{R}$$

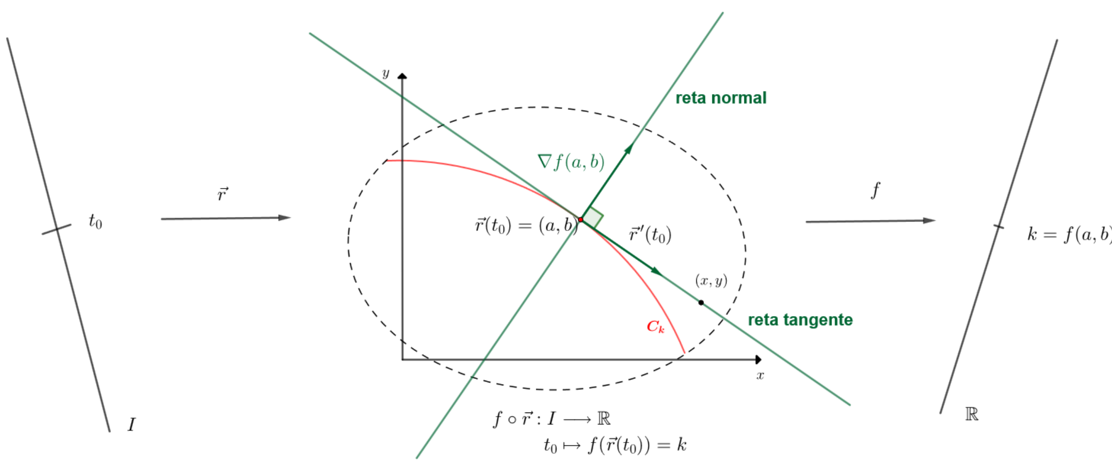


Figure 83: Reta normal e reta tangente à curva de nível

Observação: Seja: $f: D\subset\mathbb{R}^3$ R diferenciável em $(a,b,c)\in D$. Se $\nabla f(a,b,c)\neq\overrightarrow{0}$, então $\nabla f(a,b,c)\perp S_k$ em (a,b,c), onde S_k é a superfície de nível de f em (a,b,c), i.e. $\nabla f(a,b,c)$ é normal a superfície de nível de f que passa por (a,b,c).

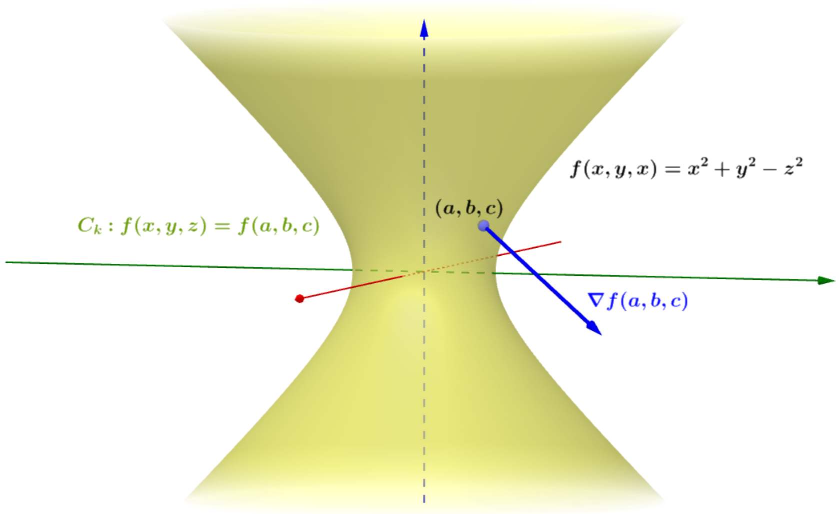


Figure 84: O vetor gradiente é perpendicular à superfície de nível de nível

Equação do plano tangente:

$$[(x,y,z)-(a,b,c)]\cdot\nabla f(a,b,c)=0$$

Equação da reta normal:

$$(x,y,z)=(a,b,c)+\lambda\nabla f(a,b,c),\lambda\in\mathbb{R}$$

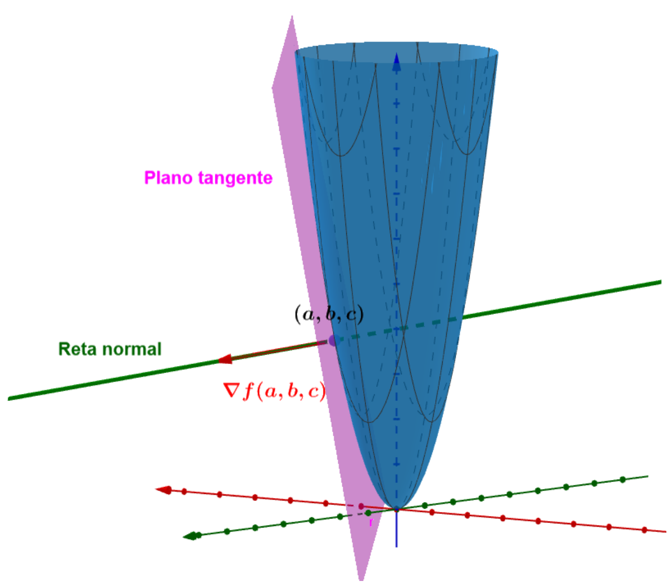


Figure 85: Plano tangente e reta normal à superfície de nível de nível $F(x,y,x)=x^2+y^2-z=0$

Exemplos

1. Seja $f(x,y)=x^2+y^2$. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1)$, onde $\vec{u}$ é o versor de $\vec{v}=(-1,1)$.

   (a) pela definição;

   Solução

   Se $\vec{v}=(-1,1)$, então $\vec{u}=\dfrac{(-1,1)}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=\dfrac{(-1,1)}{\sqrt{2}}=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

   Então,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1)=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(1+t\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),1+t\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)-f(1,1)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\left(1-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(1+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2-2}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-\frac{2t}{\sqrt{2}}+\frac{t^2}{2}+1+\frac{2t}{\sqrt{2}}+\frac{t^2}{2}-2}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t}=\lim_{t\to 0}t=0.$$

   (b) usando o vetor gradiente.

   Solução

   Como $f(x,y)=x^2+y^2$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e $u=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ é unitário, temos

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1)=\nabla f(1,1)\cdot\vec{u}=(2x,2y)|_{(1,1)}\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=$$

$$=(2,2)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}=0$$

2. Seja $\vec{u}=(u_1,u_2)$ um vetor unitário. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)$, onde $f(x,y)=\dfrac{x^3}{x^2+y^2}$, se $(x,y)\neq(0,0)$ e $f(0,0)=0$.

   Solução

   Temos

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(tu_1,tu_2)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^3u_1^3}{t^2u_1^2+t^2u_2^2}-0}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^3u_1^3}{t^2\underbrace{(u_1^2+u_2^2)}_{1}\cdot t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t^3u_1^3}{t^3}=\lim_{t\to 0}u_1^3=u_1^3$$

3. Calcule a taxa de variação de $f(x,y)=e^{-x}\cos y$ em $(0,0)$ na direção que forma um ângulo de $45°$ com o eixo x positivo.

   Solução

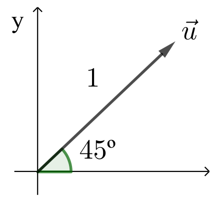


Figure 86: Vetor unitário com ângulo $45°$

Temos $\vec{u} = (\cos 45°, \text{sen}\, 45°) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Como f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$, então a taxa de variação é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \vec{u} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) \cdot \vec{u}$$

$$= \left(-e^{-x}\cos y, -e^{-x}\,\text{sen}\, y\right)|_(0,0) \cdot \vec{u} = (-1,0) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4. Calcule a derivada direcional de $f(x,y,z) = 3x^2 + 4y^2 + z$ em $(-1,2,-2)$ na direção do vetor $\vec{v} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$.

   Solução

   O versor de $\vec{v} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{k} = (-1,2,2)$ é $\vec{u} = \dfrac{(-1,2,2)}{\sqrt{1+4+4}} = \left(\dfrac{-1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$.

   Como f é diferenciável em $\mathbb{R}^3$, então $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(-1,2,2) = \nabla f(-1,2,-2) \cdot \vec{u}$, donde

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(-1,2,-2) = (6x, 8y, 1)|_{(1,2,-2)} \cdot \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) =$$

$$= (-6,16,1) \cdot \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = 2 + \frac{32}{3} + \frac{2}{3} = \frac{40}{3}.$$

5. Uma função diferenciável $f(x,y)$ tem no ponto $(1,1)$ derivada direcional igual a 3 na direção $3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$ e igual a -1 na direção $4\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$. Calcule

   (a) $\nabla f(1,1)$

   (b) $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1)$, onde $\vec{u}$ é o versor de $\vec{i} + \vec{\jmath}$.

   Solução

   (a) Temos

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}_1}(1,1) = 3, \quad \vec{u}_1 = \frac{(3,4)}{\sqrt{9+16}} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}_2}(1,1) = -1, \quad \vec{u}_2 = \frac{(4,-3)}{\sqrt{16+9}} = \left(\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}\right)$$

Donde

$$\begin{array}{c}\nabla f(1,1)\cdot \vec{u}_1 = 3\\ \nabla f(1,1)\cdot \vec{u}_2 = -1\end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{3}{5}\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) + \dfrac{4}{5}\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 3 \\ \\ \dfrac{4}{5}\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) - \dfrac{3}{5}\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -1 \end{cases}$$

Multiplicando as duas equações por 5, temos

$$\begin{cases} 3\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) + 4\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 15 \\ \\ 4\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) - 3\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -5 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por 4 e a segunda por 3, temos

$$\begin{cases} 12\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) + 16\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 60 \\ \\ -12\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) + 9\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = +15 \end{cases}$$

Logo,

$$25\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 75 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 3 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1$$

Portanto, $\nabla f(1,1) = (1,3)$.

(b) Temos $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1) = \nabla f(1,1)\cdot \vec{u}$, onde $\vec{u} = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1) = (1,3)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

6. Seja $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$. Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) \neq \nabla f(0,0)\cdot \vec{u}$, onde $\vec{u} = (u_1, u_2)$ é um vetor unitário.

Solução

Temos $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Então $\nabla f(0,0) = (1,0)$. Logo,

$$\nabla f(1,0)\cdot(u_1,u_2) = (1,0)\cdot(u_1,u_2) = u_1.$$

Vimos anteriormente que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = u_1^3$. Logo, $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) \neq \nabla f(0,0)\cdot\vec{u}$. Isto acontece porque f não é diferenciável em $(0,0)$. Verifique!

7. Seja $f(x,y) = \ln \|(x,y)\|$.

(a) Determine $\vec{u}$ de modo que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,-1)$ seja máximo.

(b) Qual o valor máximo de $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1-1)$?

(c) Estando em $(1,-1)$, que direção deve-se tomar para que f cresca mais rapidamente? E em que direção decresce mais rapidamente?

Solução

Como $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$, então $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, $(x,y) \neq (0,0)$.

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,-1)$ é máxima $\Leftrightarrow \vec{u} = \dfrac{\nabla f(1,-1)}{\|\nabla f(1,-1)\|}$, onde

$$\nabla f(1,-1) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)\Big|_{(1,-1)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right).$$

Logo, $\vec{u} = \dfrac{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}} = \dfrac{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{\vec{i}-\vec{j}}{\sqrt{2}}$

(b) O valor máximo de $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,-1)$ é igual a $\|\nabla f(1,-1)\| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(c) Em $(1,-1)$, f cresce mais rapidamente na direção de $\nabla f(1,-1) = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$ e decresce mais rapidamente na direção de $-\nabla f(1,-1) = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$.

8. Seja a temperatura do ar em um ponto do espaço dada pela função $f(x,y,z) = x^2 - y + z^2$. Um mosquito localizado em $(1,2,1)$ deseja esfriar o mais rápido possível. Em que direção ele deve voar?

Solução

Temos $\nabla f(1,2,1) = (2x,-1,2z)|_{(1,2,1)} = (2,-1,2)$. Como o sentido de $\nabla f(1,2,1)$ é aquele em que a temperatura cresce mais rapidamente, estando em $(1,2,1)$, então o mosquito deverá voar no sentido oposto, o de $-\nabla f(1,2,1) = (-2,1,-2)$.

9. A temperatura T em uma bola de metal é inversamente proporcional a distância do centro da bola, que tomamos com centro na origem. A temperatura no ponto $(1,2,2)$ é $90°$C.

(a) Determine a taxa de variação de T em $(1,2,2)$ em direção ao ponto $(2,1,3)$.

(b) Mostre que em qualquer ponto da bula a direção de maior crescimento na temperatura é dada pelo vetor que aponta para a origem.

Solução

Como a distância de (x,y,z) à origem é igual a $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ e a temperatura em (x,y,z) é inversamente proporcional a essa distância, então

$$T(x,y,z) = \frac{c}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, c > 0, \quad (x,y,z) \neq (0,0,0)$$

Como $T(1,2,2)=90°$ então, $90=\dfrac{c}{\sqrt{1+4+4}}$ ou $90=\dfrac{c}{3}$, donde $c=270$.

Logo, $T(x,y,z)=\dfrac{270}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, que é diferenciável em $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$.

(a) Pondo $P=(1,2,2),Q=(2,1,3)$, então $\overrightarrow{PQ}=(2,1,3)-(1,2,2)=(1,-1,1)$ e o seu versor é $\vec{u}=\dfrac{(1,-1,1)}{\sqrt{1+1+1}}=\dfrac{(1,-1,1)}{\sqrt{3}}$. A taxa de variação de T em $P=(1,2,2)$ na direção de $\vec{u}$ é dada por

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{u}}(1,2,2)=\nabla T(1,2,2)\cdot\vec{u}.$$

Temos

$$\frac{\partial T}{\partial x}(1,2,2)=\left[\frac{-270\,\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2}\right]_{(1,2,2)}=\frac{-270}{(1+4+4)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-270}{27}=-10$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}(1,2,2)=\left[\frac{-270y}{(x^2+y^2+z^2)}\right]_{(1,2,2)}=\frac{-540}{27}=-20$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}(1,2,2)=\left[\frac{-270z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right]_{(1,2,2)}=-20$$

Logo,
$\nabla T(1,2,2)=(-10,-20,-20)$. Então,

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{u}}(1,2,2)=(-10,-20,-20)\cdot\frac{(1,-1,1)}{\sqrt{3}}=\frac{-10+20-20}{\sqrt{3}}=-\frac{10}{\sqrt{3}}.$$

(b) A direção de maior crescimento na temperatura em qualquer (x,y,z) da bola é a do vetor $\nabla T(x,y,z)=\dfrac{270}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(-x,-y,-z)$ que aponta para a origem.

10. Determine as equações das retas tangente e normal à curva $C: e^{2x-y}+2x+2y=4$ no ponto $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

Solução

Seja $f(x,y)=e^{2x-y}+2x+2y$. Logo, $f\left(\frac{1}{2},1\right)==e^{1-1}+2\cdot\frac{1}{2}+2=4$.

Então C é a curva de nível de f no nível 4 e que passa pelo ponto dado. Temos $\nabla f(x,y)=(2e^{2x-y}+2,-e^{2x-y}+2)$, donde $\nabla f\left(\frac{1}{2},1\right)=(2e^{1-1}+2,-e^{1-1}+2)=(4,1)$. Sabemos que $\nabla f\left(\frac{1}{2},1\right)$ é normal a C em $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

Reta tangente: $\left[(x,y)-\left(\frac{1}{2},1\right)\right]\cdot\nabla f\left(\frac{1}{2},1\right)=0$, donde $\left(x-\frac{1}{2},y-1\right)\cdot(4,1)=0\Leftrightarrow 4x-2+y-1=0\Leftrightarrow y=-4x+3$

Reta normal: $(x,y)=\left(\frac{1}{2},1\right)+\lambda\nabla f\left(\frac{1}{2},1\right),\lambda\in\mathbb{R}\Leftrightarrow(x,y)=\left(\frac{1}{2},1\right)+\lambda(4,1),\lambda\in\mathbb{R}$.

11. Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superfície $S : xyz + x^3 + y^3 + z^3 = 3z$ no ponto $(1, -1, 2)$.

Solução

Seja $f(x, y, z) = xyz + x^3 + y^3 + z^3 - 3z$.

Logo, $f(1, -1, 2) = -2+1-1+8-6 = 0$. Então, S é a superfície de f no nível 0 e que passa pelo ponto dado. Temos $\nabla f(x, y, z) = (yz + 3x^2, xz + 3y^2, xy + 3z^2 - 3)$, donde $\nabla f(1, -1, 2) = (-2 + 3, 2 + 3, -1 + 12 - 3) = (1, 5, 8)$.

Sabemos que $\nabla f(1, -1, 2)$ é perpendicular a S em $(1, -1, 2)$.

Plano tangente: $[(x, y, z)-(1, -1, 2)]\cdot\nabla f(1, -1, 2) = 0 \Leftrightarrow (x-1, y+1, z-2)\cdot(1$ $\Leftrightarrow x + 5y + 8z = 12$.

Reta normal: $(x, y, z) = (1, -1, 2)+\lambda\nabla f(1, -1, 2), \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x, y, z) = (1, -1, 2)+ \lambda(1, 5, 8), \lambda \in \mathbb{R}$.

Exercícios

1. Calcule a derivada direcional de $f(x, y) = \dfrac{2}{x^2 + y^2}$ no ponto $(-1, 1)$ e na direção do vetor $2\vec{i} + 3\vec{j}$.

2. Encontre a derivada direcional de $f(x, y, z) = xe^{y^2-z^2}$ em $(1, 2, -2)$ na direção do vetor tangente $\vec{r}'(t)$ à curva $\vec{r}(t) = (t, 2\cos(t-1), -2e^{t-1})$.

3. Determine as direções em que a derivada direcional de $f(x, y) = x^2 + \operatorname{sen}(xy)$ no ponto $(1, 0)$ tem valor 1.

4. Determine a taxa de variação da função $z = \dfrac{(y-1)^2}{x}$ no ponto $P_0(1, 2)$, na direção da normal à elipse $2x^2 + y^2 = 6$ no ponto P_0.

5. Seja $g(r, \theta) = f(x, y)$, com $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$, onde $f(x, y)$ é suposta diferenciável num aberto de $\mathbb{R}^2$. Sejam $\vec{u} = \cos\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j}$ e $\vec{v} = -\operatorname{sen}\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$. Mostre que

   (a) $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y)$ e $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = \dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x, y)$

   (b) $\nabla f(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y)\vec{u} + \dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x, y)\vec{v}$.

6. Considere a função $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y$ e o ponto $P_0 = (2, 2)$. Determine

   (a) A taxa de variação de f em P_0 na direção do vetor $(1, 1)$.

   (b) A taxa de variação de f em P_0 na direção do vetor tangente $\vec{r}'(t)$ a curva $\vec{r}(t) = (t, t^2 - t)$ em $(3, 6)$.

(c) A direção na qual a taxa de variação de f em P_0 é máxima.

7. A função diferenciável $f(x, y, z)$ tem no ponto $(1, 1, 1)$, derivada direcional igual a 1 na direção $4\vec{j} + 3\vec{k}$, igual a 2 na direção $-4\vec{i} + 3\vec{j}$ e igual a zero na direção $\vec{j}$. Calcule o valor máximo de $\dfrac{\partial f}{\partial u}(1, 1, 1)$

8. Seja $f(u, v, w)$ uma diferenciável em $P(0, 0, 0)$, tal que $\dfrac{\partial f}{\partial u}(P) = 2$, $\dfrac{\partial f}{\partial v}(P) = -3$ e $\dfrac{\partial f}{\partial \omega}(P) = 2$. Defina $g(x, y) = f(5x - 5, 2xy - 2, 4y^2 - 4)$. Determine a taxa de variação de g no ponto $(1, 1)$ e na direção do vetor $-\vec{i} + \vec{j}$.

9. Suponha que, para todo t, $f\left(3t, t^3\right) = \operatorname{arctan} t$, onde $f(x, y)$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(3, 1) = 2$. Calcule a taxa de variação de f em $(3, 1)$ na direção de um vetor tangente à curva $x^2 + 4y^2 = 13$ no ponto $(3, 1)$.

10. Seja $g(x, y) = xf\left(x^2 + y^2, 2y, 2x - y\right)$. Suponha que $f(2, 2, 1) = 1$, $\dfrac{\partial f}{\partial u}(2, 2, 1) = -1$, $\dfrac{\partial f}{\partial v}(2, 2, 1) = 2$ e $\dfrac{\partial f}{\partial \omega}(2, 2, 1) = -2$.

    (a) Calcule a taxa de variação de g no ponto $(1, 1)$ na direção da normal à elipse $2x^2 + y^2 = 3$ no ponto $(1, 1)$.

    (b) Calcule a taxa de variação máxima de g no ponto $(1, 1)$. Em que direção isso ocorre?

11. Suponha que $T(x, y) = 40 - x^2 - 2y^2$ representa uma distribuição de temperatura no plano xy e um individuo que se encontra na posição $(3, 2)$ pretende dar um passeio

    (a) Descreva o lugar geométrico dos pontos que ele deverá percorrer para desfrutar sempre da mesma temperatura.

    (b) Qual a direção e sentido que deverá tomar se quisesse caminhar na direção de maior crescimento da temperatura?

    (c) Se x e y são medidos em km e a temperatura em 0°C, de quanto a temperatura se elevará aproximadamente, caso caminhe $0,01\ km$ na direção encontrada no item b?

12. Se o potencial elétrico em um ponto (x, y) do plano xy é $V(x, y)$, então o vetor de intensidade elétrica no ponto (x, y) é dado por $E = -\nabla V(x, y)$. Suponha que $V(x, y) = e^{-2x} \cos(2y)$.

    (a) Determine o vetor de intensidade elétrica em $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$.

    (b) Mostre que, em cada ponto no plano, o potencial elétrico decresce mais rapidamente na direção e no sentido do vetor **E**.

(c) Encontre o valor máximo e o valor mínimo da taxa de variação do potencial elétrico em $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$.

13. Determine uma equação do plano tangente e uma equação da reta normal ao hiperboloide de equação $x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 10$ no ponto $(4, -1, 1)$.

14. Determine uma reta que seja tangente a curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ e paralela a reta $4x + 5y = 17$.

15. Determine um plano que seja tangente a superfície $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = \frac{11}{6}$ e paralelo ao plano $x + y + z = 10$.

16. Considere a função $z = \dfrac{\sqrt[4]{8 + x^2 + y^2}}{y}$. Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico da função dada no ponto $(2, 2, 1)$.

17. Considere a curva C intersecção das superfícies de equações $S_1 : x^2 - 2xz + y^2 z = 3$ e $S_2 : 3xy - 2yz = -2$. Determine:

    (a) um vetor tangente a C em $(1, -2, 1)$.

    (b) Os pontos do hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 + 12 = 0$, onde o plano tangente é perpendicular ao vetor encontrado no item (a).

Respostas

1. $-\frac{\sqrt{13}}{13}$
2. $-\frac{7\sqrt{5}}{5}$
3. $\vec{u} = \vec{j}, \vec{u} = \frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j}$
4. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
5. sem resposta
6. (a) $3\sqrt{2}$

   (b) $\frac{7\sqrt{26}}{13}$

   (c) $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$
7. $\frac{5}{6}\sqrt{13}$
8. 3 $\sqrt{2}$
9. $-\frac{8}{3}$
10. (a) $\frac{-6\sqrt{5}}{5}$

(b) $\sqrt{41}$ na direção $-5\vec{\imath}+4\vec{\jmath}$

11. (a) $C: x^2+2y^2=17$ (elipse)

    (b) $-6\vec{\imath}-8\vec{\jmath}$

    (c) A temperatura se elevará aproximadamente de $0,1°\ C$ na direção de $-\frac{3}{5}\vec{\imath}-\frac{4}{5}\vec{\jmath}$

12. (a)

    (b)

    (c)

13. $2x-2y-z+1=0$

14. $2x+y-2z=5; (x,y,z)=(4,-1,1)+\lambda(8,4,-8), \lambda\in\mathbb{R}$

15. $y-2=-\frac{4}{5}(x-1)$ ou $y+2=-\frac{4}{5}(x+1)$

16. $x+y+z=\frac{11}{6}$ ou $x+y+z=-\frac{11}{6}$

17. (a) $(3,2,4)$

    (b) $(6,4,-8)$ e $(-6,-4,8)$

Derivadas Parciais de Ordem Superior

Objetivos:

- cálculo de derivadas parciais de ordem superior;
- teorema de Schwarz;
- polinômio de Taylor de ordem 2; aproximação não linear.

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, D aberto, diferenciável. Então existem as funções derivadas parciais de primeira ordem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Suponhamos que as funções $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sejam diferenciáveis em D. Então, temos as funções derivadas parciais de segunda ordem:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Supondo as funções $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial f}{\partial y \partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ diferenciáveis em D, temos as funções derivadas parciais de 3 ordem:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

E assim por diante.

Observação: Caso as derivadas parciais de 2^a ordem existam, essa seria sua definição:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(a+h,b) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)}{h}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) = \lim_{k \to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b+k) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)}{k}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) = \lim_{k \to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b+k) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{k}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(a+h,b) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{h}$$

Definição: Dizemos que f é de classe C^k em D se f tem derivadas parciais de ordem k contínuas em D.

Teorema de Schwarz Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, D aberto. Se f for de classe C^2 em D, então as derivadas parciais mistas são iguais em D:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x,y), \quad \forall (x,y) \in D, \quad \forall i, 1 = 1, \ldots, n$$

Em particular, se f for uma função de duas variáveis, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$.

Polinômio de Taylor de Ordem 1

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 no aberto $D \subset \mathbb{R}^2$. Seja $(a,b) \in D$. O polinômio:

$$P_1(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

é dito polinômio de Taylor de ordem 1 de f perto de (a,b).

Sabemos que $\Delta f \simeq df$ quando $(x,y) \simeq (a,b)$. Logo,

$$f(x,y) - f(a,b) \simeq \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

Se $(x,y) \simeq (a,b)$
Donde,

$$f(x,y) \simeq f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

se $(x,y) \simeq (a,b)$.

Portanto, $\quad f(x,y) \simeq P_1(x,y)$, se $(x,y) \simeq (a,b)$.

Polinômio de Taylor de Ordem 2

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 no aberto $D \subset \mathbb{R}^2$ e $(a,b) \in D$. O polinômio

$$P_2(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{\partial f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2\right]$$

é dito polinômio de Taylor de ordem 2 de f perto de (a,b).

Mostra-se que $f(x,y) \simeq P_2(x,y)$ se $(x,y) \simeq (a,b)$.

Observação

(I) $P_1(x,y) = L(x,y)$, a função linearizada de f perto de (a,b).

(II) $P_2(x,y)$ também serve para aproximar os valores da função f em pontos próximos a (a,b). O erro de aproximação de $P_2(x,y)$ é menor do que o erro de aproximação pela linearizada.

(III) É aconselhável aproximar por $P_2(x,y)$ quando $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$. Exemplo: $f(x,y) = \cos(x+y)$ em $(0,0)$.

Exemplos

1. Calcule todas as derivadas parciais de 2^a ordem de $f(x,y) = \ln(1+x^2+y^2)$.

Solução

Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{1+x^2+y^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{1+x^2+y^2}$$

Logo,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2(1+x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{2+2x^2+2y^2-4x^2}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{2-2x^2+2y^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-2x \cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{-4xy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2(1+x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{2+2x^2+2y^2-4y^2}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{2+2x^2-2y^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-2y \cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{-4xy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

2. Seja $u = f(x-at) + g(x+at)$, onde f e g são duas funções quaisquer de uma variável real e deriváveis até a 2^a ordem. Verifique que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Esta equação é conhecida como a equação de onda.

Solução

Derivando u em relação a x, temos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x-at)\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(x-at)}_{1} + g'(x+at)\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(x+at)}_{1}$$

donde $\dfrac{\partial u}{\partial x} = f'(x-at) + g'(x+at)$.

Logo, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x-at)\underbrace{\dfrac{\partial}{\partial x}(x-at)}_{1} + g''(x+at)\underbrace{\dfrac{\partial}{\partial x}(x+at)}_{1}$

donde, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x-at) + g''(x+at) \qquad (1)$

Derivando u em relação a t, temos:

$\dfrac{\partial u}{\partial t} = f'(x-at)\underbrace{\dfrac{\partial}{\partial t}(x-at)}_{-a} + g'(x+at)\underbrace{\dfrac{\partial}{\partial t}(x+at)}_{a}$

donde $\dfrac{\partial u}{\partial t} = -af'(x-at) + ag'(x+at)$.

Logo, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -af''(x-at)\underbrace{\dfrac{\partial}{\partial t}(x-at)}_{-a} + ag''(x+at)\underbrace{\dfrac{\partial}{\partial t}(x+at)}_{a}$, donde

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 f''(x-at) + a^2 g''(x+at)\dfrac{\partial}{\partial t}(x+at)$, ou

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(f''(x-at) + g''(x+at)\right) \qquad (2)$

De (1) e (2), vemos que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, como queríamos verificar.

3. Seja $w(x,t) = (a\,\mathsf{cos}\,(cx) + b\,\mathsf{sen}\,(cx))e^{-kc^2 t}$, onde a, b e c são constantes. Verifique que

$$\frac{\partial w}{\partial t} = k\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Esta equação é conhecida como a equação do calor.

Solução

Derivando w em relação a t, temos:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = -kc^2e^{-kc^2t}(a\,\mathsf{cos}(cx) + b\,\mathsf{sen}(cx))$$

Derivando w em relação a x, temos:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = e^{kc^2t}(-ac\,\mathsf{sen}(cx) + bc\,\mathsf{cos}(cx))$$

Derivando de novo em relação a x, temos:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} = e^{-k^2t}(-ac^2\,\mathsf{cos}(cx) - bc^2\,\mathsf{sen}\,(cx)) = -c^2e^{-kc^2t}(a\,\mathsf{cos}(cx) + b\,\mathsf{sen}\,(cx))$$

Portanto,

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = k\left[-c^2e^{-kc^2t}(a\,\mathsf{cos}(cx) + b\,\mathsf{sen}(cx))\right] = k\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}$$

4. Suponha que $f(x,y)$ seja de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$. Seja $g(t) = f(3t, 2t+1)$. Expresse $g''(t)$ em ternos das derivadas parciais de f.

Solução

Temos $g(t) = f(x,y)$, onde $x = 3t, y = 2t+1$. Pela regra da cadeia, temos

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{dy}{dt} = 3\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y),$$

ou seja,

$g'(t) = 3\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, onde $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ são funções compostas.

Então, novamente, pela regra da cadeia, temos:

$$g''(t) = 3\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=3} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{=2}\right]$$

$$+2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=3} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{=2}\right]$$

$$= 9\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 6\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x} + 6\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) + 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

Como f é de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$, então pelo Teorema de Schwarz, temos $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)$.

Logo,

$$g''(t) = 9\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 12\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) + 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).$$

5. Seja, $z = f(u-2v, v+2u)$, onde $f(x,y)$ é de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$. Expresse $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ em termos das derivadas parciais de f.

Solução

Seja $z = f(x,y)$, onde $x = u-2v, y = v+2u$. Donde, $\dfrac{\partial x}{\partial u} = 1, \dfrac{\partial x}{\partial v} = -2, \dfrac{\partial y}{\partial u} = 2, \dfrac{\partial y}{\partial v} = 1$.

Pela regra da cadeia, temos

$\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\dfrac{\partial y}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

Como $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ com $x = u-2v, y = v+2u$ são funções compostas, então, para derivá-las, usamos a regra da cadeia. Temos, então

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} &= \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)\frac{\partial y}{\partial u}\right] \\ &\quad +2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\frac{\partial y}{\partial u}\right] \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y}(x,y) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).\end{aligned}$$

Como f é de classe C^2, então pelo teorema de Schwarz, segue que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$.

Logo,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 4\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).$$

6. Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, D aberto, duas funções de classe C^2 e tais que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$$

Prove que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ e $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$.

Esta equação é conhecida como equação de Laplace.

Solução

Derivando $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial y}$ em relação a x; e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{\partial g}{\partial x}$ em relação a y, temos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$$

donde, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}$.

Como g é de classe c^2 então, pelo teorema de Schwarz, temos $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}$.

Logo, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

Derivando, $\dfrac{\partial g}{\partial x}=-\dfrac{\partial f}{\partial y}$ em relação, a x e $\dfrac{\partial g}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial x}$ em relação a y, temos:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial^2 g}{\partial za}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

Logo, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=-\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.

Como f é de classe c^2, então $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$. Assim, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=0$.

7. Mostre que a seguinte função é solução da equação do calor, para a,b e c constantes.

$$w(x,t)=(\alpha\,\mathsf{cos}(cx)+\beta\,\mathsf{sen}(cx))e^{-ke^2t}$$

Solução

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\omega}{\partial t}&=-kc^2e^{-kc^2t}(a\,\mathsf{cos}(cx)+b\,\mathsf{sen}(cx))\\
\frac{\partial\omega}{\partial x}&=e^{-ec^2t}(-ac\,\mathsf{sen}(cx)+bc\,\mathsf{cos}(cx))\\
\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}&=e^{-k^2t}\left(-ac^2\,\mathsf{cos}(cx)-bc^2\,\mathsf{sen}(cx)\right)=\\
&=-c^2e^{-kct}(a\,\mathsf{cos}(cx)+b\,\mathsf{sen}(cx))\\
\frac{\partial\omega}{\partial t}&=k\left[-c^2e^{-kct}(a\,\mathsf{cos}(cx)+b\,\mathsf{sen}(cx)]\right]=k\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

Solução

8. Seja $f(x,y)=x^3+y^3-x^2+4y$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

   (a) Determine $P_1(x,y)$, o polinômio de Taylor de ordem 1, de f em volta de $(1,1)$.

   (b) Utilizando $P_1(x,y)$, calcule um valor aproximado para $f(x,y)$, sendo $x=1,001$ e $y=0,99$.

Solução

(a) Temos $P_1(x,y) = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)$

Como $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 2x$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 + 4$, resulta $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 7$.

Então, $P_1(x,y) = 5 + 1(x-1) + 7(y-1)$, ou seja, $P_1(x,y) = x + 7y - 3$.

(b) Como $x = 1.001 \simeq 1$ e $y = 0.99 \simeq 1$, então

$f(1.001, 0.99) \simeq P_1(1.001, 0.99) = 1.001 + 7 \cdot (0.99) - 3 = 1,001 + 6.93 - 3 = 4.931$.

9. Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 de $f(x,y) = x \operatorname{sen} y$, ao redor do ponto $(0,0)$.

Solução

Temos

$$P_2(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)y^2\right].$$

Como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \operatorname{sen} y, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \cos y, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \cos y, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -x \operatorname{sen} y$$

então, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$.

Assim, $P_2(x,y) = 0 + 0.x + 0.y + \frac{1}{2}\left[0 \cdot x^2 + 2 \cdot 1 \cdot xy + 0.y^2\right]$

ou seja, $P_2(x,y) = xy$

10. Use o polinômio de Taylor de ordem 2 de $f(x,y) = \operatorname{sen} x$ na origem para obter uma aproximado de $f(0.1, 0.1)$.

Solução

Como $(0.1, 0.1) \simeq (0,0)$, então

$$f(0.1, 0.1) \simeq P_1(0.1, 0.1) = (0,1)(0,1)$$

ou seja,

$$f(0.1, 0.1) \simeq 0.01$$

Exercícios

1. Calcule todas as derivadas de segunda ordem da função $f(x, y) = x^3y^2 + xy^4$.

2. Calcule todas as derivadas de segunda ordem da função $f(x, y) = xye^{xy^2}$.

3. Calcule todas as derivadas de segunda ordem da função $f(x, y, z) = x^2 \operatorname{sen}(yz)$.

4. Calcule todas as derivadas de segunda ordem da seguinte função no ponto $(0, 0)$.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

5. Expresse $g''(t)$ em termos das derivadas parciais de f, sendo $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável e sendo

$$g(t) = f(1 - t, t^2)$$

6. Considere $h(u, v) = f(u^2v^2, 2uv)$ onde $f(x, y)$ é uma função de classe C^2. Expresse $\dfrac{\partial^2 h}{\partial u^2}(u, v)$ em termos das derivadas parciais da função f.

7. A distribuição da temperatura de um disco com centro na origem é dada por $T(x, y)$ de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$. Sabe-se que $\dfrac{\partial^2 T}{\partial y \partial x} = 0$ e $\dfrac{\partial T}{\partial y}(x, y) = 2$. Calcule $\dfrac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(\rho, \theta)$, sendo $U(\rho, \theta) = T(\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta)$, em termos das derivadas parciais de T em relação à x.

8. Seja $v(r, \theta) = u(x, y)$, onde $x = r\cos\theta, y = r\operatorname{sen}\theta$. Verifique que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}$$

9. Calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1, 1)$ onde $z = f(x, y)$ é uma função de classe C^1 definida implicitamente pela equação $x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z$ sabendo que $f(1, 1) = 1$.

10. Dizemos que uma função de duas variáveis é harmônica se é de classe C^2 e satisfaz a equação de Laplace:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Mostre que a seguinte função é harmônica

$$k(x, y) = e^x \operatorname{sen} y + e^y \cos x$$

11. Use o polinômio de Taylor de ordem 1 da função $f(x, y) = x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}$ no ponto $(1, 1)$ para obter uma aproximação de $f(1.1, 0.9)$.

12. Determine $P_2(x,y)$ de $f(x,y)=\ln(1+x+2y)$ ao redor de $(0,0)$.

13. Usando o polinômio de Taylor de 2^a ordem para alguma função conveniente, dê um valor aproximado de $(0.95)^{2.01}$ (considere $f(x,y)=x^y=e^{y\ln x}$)

Respostas

1. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6xy^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=6x^2y+4y^3$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2x^3+12xy^2$.

2. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=e^{y^2(1+2y^2)}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2xye^{y^2}(3+2y^2)$.

3. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2\,\text{sen}\,(yz)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=2xz\cos(yz)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}=2xy\cos(yz)$,
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-x^2z^2\,\text{sen}\,(yz)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}=-x^2yz\,\text{sen}\,(yz)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=-x^2y^2\,\text{sen}\,(yz)$.

4. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=1$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

5. $g''(t)=f_{xx}(1-t,t^2)-4tf_{xy}(1-t,t^2)+4t^2f_{yy}(1-t,t^2)+2f_y(1-t,t^2)$.

6. $\dfrac{\partial^2 h}{\partial u^2}(u,v)=2v^2f_x\left(u^2v^2,2uv\right)+4u^2v^4f_{xx}\left(u^2v^2,2u\right)+8uv^3f_{xy}\left(u^2v^2,2uv\right)+4v^2f_{yy}\left(u^2v^2,2uv\right)$.

7. $\rho\cos\theta\frac{\partial T}{\partial x}(\rho\cos\theta,\rho\,\text{sen}\,\theta)+\rho^2\,\text{sen}^2\,\theta\frac{\partial T}{\partial x^2}(\rho\cos\theta,\rho\,\text{sen}\,\theta)$

8. sem resposta

9. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(1,1)=-3$.

10. sem resposta

11. 0.95

12. $x+2y-\frac{x^2}{2}-2xy-2y^2$

13. 0.90225

Extremantes locais. Classificação de prontos críticos

Objetivos:

- definição de máximo e mínimo global;
- definição de máximo e mínimo local; definição de ponto de sela;
- função hessiana; classificação de pontos críticos;
- cálculo de máximos/mínimos absolutos em abertos.

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $(a, b) \in D$.

Definição 1: Dizemos que $(a, b) \in D$ é ponto de máximo global ou absoluto de f se

$$f(x, y) \leqslant f(a, b), \quad \forall (x, y) \in D.$$

Neste caso, $f(a, b)$ é o valor máximo de f.

Definição 2: Dizemos que $(a, b) \in D$ é ponto de mínimo global ou absoluto de f se

$$f(x, y) \geqslant f(a, b), \quad \forall (x, y) \in D.$$

Neste caso, $f(a, b)$ é o valor mínimo de f.

Exemplo:

Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Temos

$$f(0, 0) = 0 \leqslant x^2 + y^2 = f(x, y),$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Logo $(0, 0)$ é ponto de mínimo global de f.

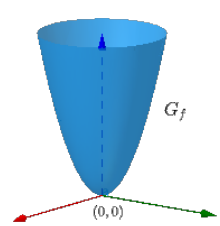


Figure 87: Mínimo global

Exemplo:

Seja $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Temos

$$f(0,0) = 4 \geqslant 4 - x^2 - y^2 = f(x,y),$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Logo, $(0,0)$ é ponto de máximo global de f.

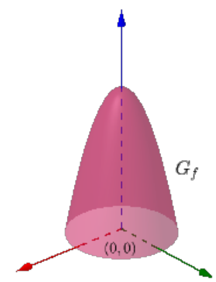


Figure 88: Máximo global

Definição 3: Dizemos que $(a,b) \in D$ é ponto de máximo local ou relativo de f se existir uma bolsa aberta B de centro (a,b), tal que

$$f(x,y) \leq f(a,b), \quad \forall (x,y) \in B \cap D$$

Definição 4: Dizemos que $(a,b) \in D$ é ponto de mínimo local ou relativo de f se existir uma bola aberta B de centro (a,b) tal que

$$f(x,y) \geqslant f(a,b), \quad \forall (x,y) \in B \cap D.$$

Os pontos de máximo e de mínimo de f são denominados extremantes de f.

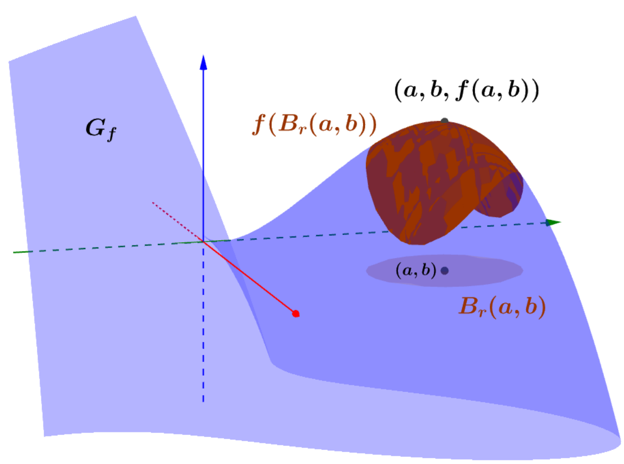


Figure 89: Máximo local

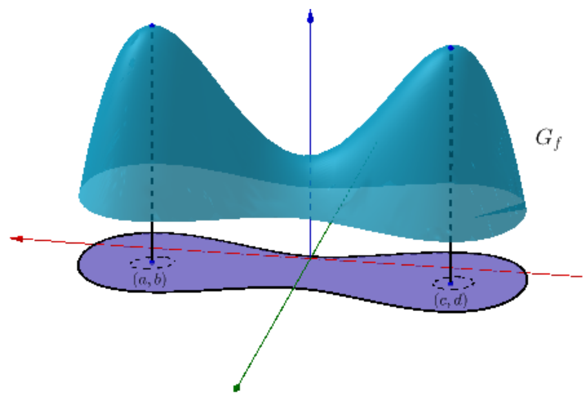


Figure 90: Dois máximos locais e globais com mesmo valor

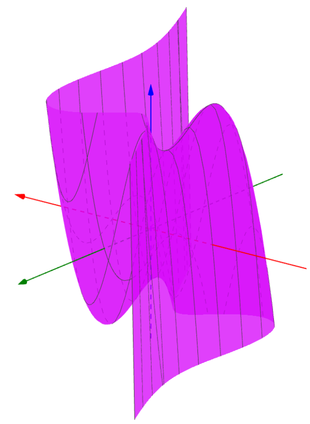


Figure 91: Extremantes locais que não são globais

Teorema: Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em $(a, b) \in D$. Se (a, b) é um extremante local de f, então $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$; ou equivalentemente, $\nabla f(a, b) = (0, 0)$.

Interpretação geométrica: Sendo f diferenciável em (a, b). O plano tangente ao gráfico de f em $(a, b, f(a, b))$, onde (a, b) é um extremante local de f, é um plano horizontal.

Com efeito, o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a, b, f(a, b))$ é:

$$z - f(a, b) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)}_{=0}(x - a) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}_{=0}(y - b)$$

donde, $z = f(a, b)$ que é um plano horizontal.

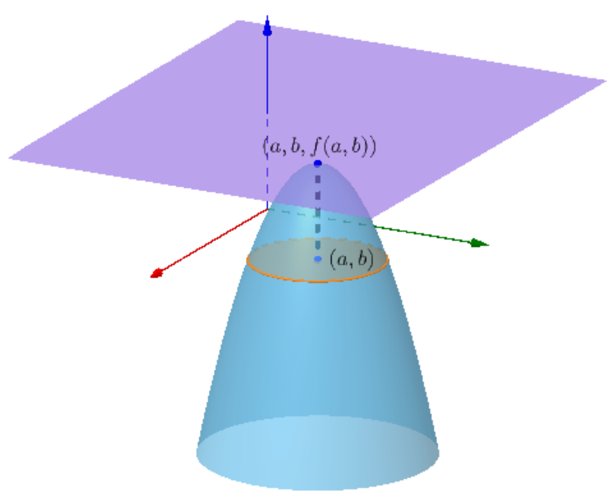


Figure 92: Plano tangente em um extremante local

Definição 5: Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, D aberto. Um ponto $(a, b) \in D$ é dito de ponto critico de f se $\nabla f(a, b) = (0, 0)$ ou se $\nabla f(a, b)$.

Observações:

(I) Se (a, b) é um extremante local, então (a, b) é ponto crítico.

(II) Se (a, b) é um ponto crítico, então (a, b) é candidato a ser extremante local.

(III) A recíproca do Teorema é falsa.

De fato, considere a função $f(x, y) = y^2 - x^2$, que é diferenciável. Os pontos críticos de f são encontrados resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

Portanto, $(x, y) = (0, 0)$ é o único ponto crítico da função.

Observe que o gráfico de f tem equação $G_f : z = y^2 - x^2$, que é um paraboloide hiperbólico.

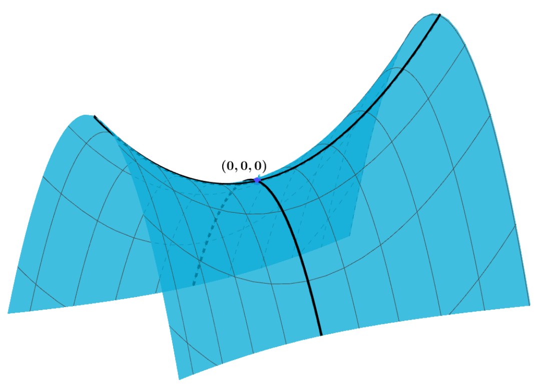


Figure 93: Ponto de sela

Pelo gráfico de f, vemos que o ponto crítico $(0, 0)$ não é um extremante local. Com efeito, a curva interseção com o plano $x = 0$, isto é, $z = y^2$, possui um mínimo em $(0, 0)$. Já a curva interseção com o plano $y = 0$, isto é, $z = -x^2$, possui um máximo em $(0, 0)$. Neste caso, $(0, 0)$ é dito de ponto de sela.

(IV) Seja $p(x, y) = Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F$, onde A, B, C, D, E, F são constantes. Se $A \neq 0$ e $B \neq 0$, então o gráfico de p, G_p, é um paraboloide elíptico ou um paraboloide hiperbólico.

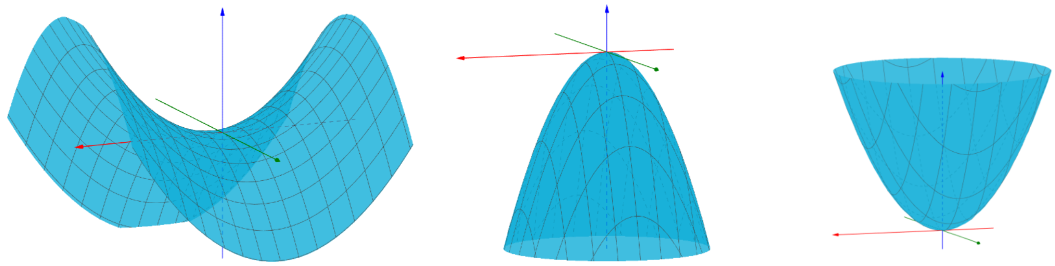


Figure 94: Sela, máximo e mínimo

Se $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ é um extremante local de f, então G_p é um paraboloide elíptico. Logo (a,b) é um extremante absoluto de f.

Se $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ não for um extremante local de f, então G_p é um paraboloide hiperbólico. Logo (a,b) é um ponto de sela.

(V) Se $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, D aberto, for uma função de classe C^2 e (a,b) um ponto crítico, então

$$P_2(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y-b)^2 =$$

$$= Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F,$$

onde A, B, C, D, E, F são constantes, é o polinômio de Taylor de ordem 2 de f centrado no ponto (a,b).

(VI) Se $\nabla f(a,b) = (0,0)$ e o ponto crítico (a,b) não for um extremante local (máximo ou mínimo), então (a,b) é dito de ponto de sela.

Para analisar a natureza de um ponto crítico (a,b) de f tal que $\nabla f(0,0) = (0,0)$ usaremos o teste da derivada segunda.

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, D aberto, cujas parciais de segunda ordem existem em D. A matriz

$$h_f(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix}$$

é dita matriz hessiana de f no ponto $(x,y) \in D$.

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, D aberto, de classe C^2 em D. A função

$$H_f(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2$$

é dita hessiano de f no ponto $(x, y) \in D$.

Observe que o hessiano $H_f(x, y)$ é o determinante da matriz hessiana $h_f(x, y)$, $\forall (x, y) \in D$.

Por abuso de notação escreveremos $H(x, y)$ sempre que não houver dúvidas sobre a função f.

Observe que

$$P_2(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{2}[x - a, y - b]\ h_f(a, b) \begin{bmatrix} x - a \\ y - b \end{bmatrix},$$

sendo $P_2(x, y)$ o polinômio de Taylor de ordem 2 centrado em (a, b) da função f.

Assim, de acordo com a observação (IV) e (V), próximo do ponto (a, b) a função $f(x, y)$ pode ser enxergada como um paraboloide elíptico ou um paraboloide hiperbólico, dependendo da forma quadrática $[x - a, y - b]\ h_f(a, b) \begin{bmatrix} x - a \\ y - b \end{bmatrix}$ for não definida, definida negativa ou definida positiva (de esquerda a direita na figura da Observação (IV)).

O Teorema a seguir relaciona o argumento anterior com os extremantes da função. Ver observação (IV).

Teorema (teste da derivada segunda): Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, D aberto, de classe C^2 em D. Seja $(a, b) \in D$, um ponto crítico de f, isto é, $\nabla f(a, b) = (0, 0)$. Então,

(i) $H(a, b) > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0 \Rightarrow (a, b)$ é ponto de mínimo local de f

(ii) $H(a, b) > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0 \Rightarrow (a, b)$ é ponto de máximo local de f

(iii) $H(a, b) < 0 \Rightarrow (a, b)$ é ponto de sela de f

(iv) $H(a, b) = 0 \Rightarrow$ nada se conclui.

Exemplos

1. Determine os pontos críticos de $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$.

   Solução

   Como f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$, então os pontos críticos de f são encontrados resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

Portanto, os pontos críticos são $(1,1), (-1,1), (1,-1), (-1,-1)$.

2. Determine os pontos críticos de $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Solução

Temos $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\forall (x,y) \neq (0,0)$.

Observe que $D_f = \mathbb{R}^2$, portanto falta estudar a origem. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$

O limite não existe, logo $\nexists \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e também não existe $\nabla f(0,0)$. Então, $(0,0)$ é o único ponto crítico da função f.

Como $f(0,0) = 0 \leq \sqrt{x^2+y^2} = f(x,y)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, o ponto crítico $(0,0)$ é um ponto de mínimo absoluto de f.

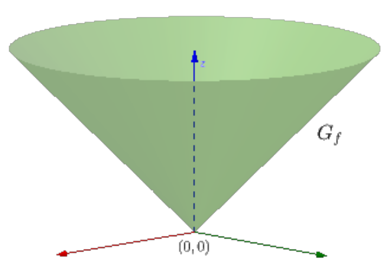


Figure 95: Mínimo de uma função não diferenciável

3. Classifique os pontos críticos da função $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$.

Solução

Vimos anteriormente que $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ e $(-1,-1)$ são os pontos críticos de f. Temos, $f_x = 3x^2 - 3$, $f_y = 3y^2 - 3$, $f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = 6y$.

Logo,

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} = 36xy.$$

Aplicando o teste da segunda derivada:

$$H(1,1) = 36 > 0, f_{xx}(1,1) = 6 > 0 \Rightarrow (1,1) \text{ é ponto de mínimo local}$$

$H(-1,1) = -36 < 0 \Rightarrow (-1,1)$ é ponto de sela.

$H(1,-1) = -36 < 0 \Rightarrow (1,-1)$ é ponto de sela

$H(-1,-1) = 36 > 0$ e $f_{xx}(-1,-1) = -6 < 0 \Rightarrow (-1,1)$ é ponto de máximo local.

4. Seja $f(x,y) = x^4 + y^4$. Determine os pontos críticos de f e classifique-os, se possível, pelo teste da derivada segunda.

Solução

Temos $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y^3$.

Logo,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} (x,y) = (0,0) \\ \text{é o único ponto crítico da função} \end{array}$$

Temos $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, logo $H(x,y) = \begin{vmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{vmatrix} =$ $144x^2y^2$, donde $H(0,0) = 0$. Portanto, nada se conclui pelo teste da derivada segunda.

Contudo,

$$f(0,0) = 0 \leq x^4 + y^4 = f(x,y)$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Logo, $(0,0)$ é ponto de mínimo global de f.

5. Analise a natureza dos pontos críticos de $f(x,y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$.

Solução

Temos $f_x = 8x^3 - 2x, f_y = 2y - 2$. Para encontrar os pontos críticos de f, devemos resolver o sistema de equações:

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x^3 - 2x = 0 \\ \ 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x(4x^2 - 1) = 0 \\ \ 2(y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \quad \text{ou} \quad 4x^2 - 1 = 0 \\ \qquad y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{2} \\ \qquad y = 1 \end{cases}$$

Logo, os ponto crítico de f são $(0,1)$, $(\dfrac{1}{1}, 0)$, $(-\dfrac{1}{2}, 0)$.

Vamos aplicar o teste da derivada segunda, temos

$$f_{xx} = 24x^2 - 2, f_{xy} = 0, f_{yy} = 2.$$

O hessiano de f é dado por

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 2\,(12x^2 - 1) & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4\left(12x^2 - 1\right).$$

$H(0,1) = -4 < 0 \Rightarrow (0,1)$ é ponto de sela

$H(\frac{1}{2},0) = 4\left(12 \cdot \frac{1}{4} - 1\right) > 0$ e $f_{xx}\left(\frac{1}{2},0\right) = 2\left(12 \cdot \frac{1}{4} - 1\right) > 0 \Rightarrow$ $\left(\frac{1}{2},0\right)$ é ponto mínimo local.

$H(-\frac{1}{2},0) > 0$ e $f_{xx}\left(-\frac{1}{2},0\right) > 0 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2},0\right)$ é ponto de mínimo local.

6. Determine o ponto do plano $x + 2y - z = 4$ que se encontra mais próximo da origem.

Solução

A distância de (x,y,z) a $(0,0,0)$ é dada por $d(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Como (x,y,z) está no plano, então $x + 2y - z = 4$ ou $z = x + 2y - 4$. Assim, temos

$$D(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+(x+2y-4)^2}.$$

Observamos que minimizar $D(x,y)$ é equivalente a minimizar $D^2(x,y) = f(x,y)$. Então, consideremos

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + (x+2y-4)^2 \geqslant 0, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

O fato de $f(x,y) \geqslant 0$ não significa que 0 seja o valor mínimo global. Pode ser um outro valor $M > 0$. O mesmo acontece com a função $z = x^2 + y^2 + 8$. Confira!

Aplicaremos o teste da segunda derivada para encontrar um ponto de mínimo local e depois argumentaremos que o mesmo é um ponto de mínimo global.

Temos,

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x + 2(x+2y-4) = 4x + 4y - 8 \\ f_y(x,y) &= 2y + 2\cdot 2(x+2y-4) = 4x + 10y - 16. \end{aligned}$$

Os ponto crítico são encontrados resolvendo

$$\begin{cases} 4x + 4y - 8 = 0 \\ 4x + 10y - 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 4y = 8 \\ 4x + 10y = 16 \end{cases} \Rightarrow 6y = 8 \Rightarrow y = \frac{4}{3}, x = \frac{2}{3}.$$

Então $(x,y) = \left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$ é o único ponto crítico de f.

Temos $f_{xx} = 4$, $f_{xy} = 4$,$f_{yy} = 10$. Logo, $H(x,y) = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 40 - 16 > 0$. Como $f_{xx} = 4 > 0$, então, pelo teste da derivada segunda, temos que $\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$ é ponto de mínimo local de f.

Como f é um polinômio de grau 2, decorre da Observação (IV) que $\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$ é ponto de mínimo global. Portanto, o ponto mais próximo da origem é $\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$ e $M = \frac{2\sqrt{6}}{3} > 0$ é a distância mínima.

7. Deseja-se construir uma caixa retangular sem tampa, com volume $4dm^3$. O material a ser utilizado nas laterais custa o dobro do que será utilizado no fundo. Determine as dimensões da caixa que minimiza o custo do material.

   Solução

   Sejam $x, y, z > 0$ as dimensões da caixa. Logo, $xyz = 4$, donde $z = \dfrac{4}{xy}$, $x, y > 0$.

   O custo total é dado por $2(xz + yz) + xy$, onde $z = \dfrac{4}{xy}$.

   Portanto, queremos minimizar $f(x,y) = 2\left(\dfrac{4}{y} + \dfrac{4}{x}\right) + xy$, $x > 0$, $y > 0$.

   Temos, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{8}{x^2} + y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{8}{y^2} + x$. Vamos resolver

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{8}{x^2} + y = 0 \\ \\ -\dfrac{8}{x^2} + x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{8}{x^2} (*) \\ \\ x = \dfrac{8}{y^2} (*) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 y = xy^2 \overset{x,y>0}{\Rightarrow} x = y$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} x^3 = y^3 = 8 \Rightarrow (x,y) = (2,2)$$

   Temos $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{16}{x^3}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{16}{y^3}$.

   Então, $H(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{16}{x^3} & 1 \\ 1 & \dfrac{16}{y^3} \end{vmatrix} = \dfrac{16^2}{x^3 y^3} - 1$

   Como $H(2,2) = \dfrac{16^2}{64} - 1 > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x}(2,2) = \dfrac{16}{8} > 0$, decorre do teste da segunda derivada que $(2,2)$ é ponto de mínimo local. Pela natureza do problema, vemos que as dimensões que minimiza o custo são $x = 2$, $y = 2$ e $z = \dfrac{4}{2 \cdot 2} = 1$. E o custo mínimo é de $f(2,2) = 8$ unidades de moeda.

Exercícios

1. Analise a natureza dos pontos críticos das seguintes funções.

   (a) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

   (b) $f(x,y) = y - x^2 - y^2 + x^2 y$

   (c) $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{xy}$

   (d) $f(x,y) = (x-3)\,\ln(xy)$

2. Determine as dimensões de uma caixa retangular sem tampa, com um volume de $32\ dm^3$ e que requer uma quantidade mínima de material para a sua construção.

3. Determine a distância mais curta entre o ponto $(1, 0, -2)$ e o plano $x+2y+z = 4$.

Respostas

1. (a) $(2, 1)$ ponto de mínimo local; $(-2, -1)$ ponto de máximo local; $(1, 2)$ e $(-1, 2)$ pontos de sela .
   (b) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ponto de máximo local; $(1, 1)$ e $(-1, 1)$ pontos de sela .
   (c) $(1, 1)$ e $(-1, -1)$ pontos de mínimo local.
   (d) (3, $\frac{1}{3}$) ponto de sela.

2. base quadrada de lado $4\ dm$ e altura $2\ dm$

3. $5\sqrt{6}/6$.

Extremos absolutos em compactos. Multiplicadores de Lagrange

Objetivos:

- Teorema de Weierstrass; cálculo de máximos/mínimos absolutos em compactos
- Multiplicadores de Lagrange

Teorema (de Weierstrass): Se $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua num conjunto compacto $K \subset D$, então f tem um valor máximo absoluto e também um valor mínimo absoluto em K.

Método para encontrar extremantes absolutos em um conjunto compacto

1. Achar os pontos críticos no interior de K, $Int(K)$, e achar os valores de f nestes pontos críticos.
2. Achar os valores máximos e mínimos de f fronteira de K, $Fr(K)$.
3. Compare os valores obtidos no item 1) e 2). O maior deles será o valor máximo absoluto e o menor deles será o valor mínimo absoluto.

O conjunto fronteira de K pode ser um ponto, uma curva ou união de pontos e curvas. Portanto, um caminho natural para calcular os máximos e mínimos na fronteira é estudar a imagem da parametrização do conjunto.

Exemplo: Encontre os extremos absolutos da função $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$ na região $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.

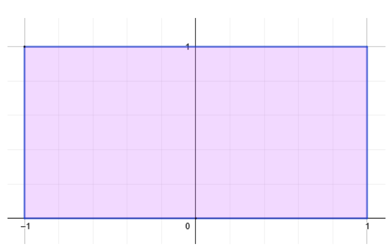


Figure 96: O conjunto $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$

Observe que o conjunto fonteira de K é a união dos segmentos: $C_1 : \overline{(-1,0)(1,0)}$, $C_2 : \overline{(1,0)(1,1)}$, $C_3 : \overline{(1,1)(-1,1)}$ e $C_4 : \overline{(-1,1)(-1,0)}$.

Já o interior de K é a parte interna do retângulo, isto é, $Int(K) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -1 < x < 1, 0 < y < 1\}$.

Como $K \subset Dom(f) = \mathbb{R}^2$ é um conjunto compacto e $f(x,y)$ é uma função contínua em K, então o Teorema de Weierstrass nos garante a existência de máximo e mínimo em K.

1. Calculemos o pontos críticos no interior de K.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 0 \\ 6y = 0 \end{cases}$$

   Donde, $x = y = 0$. Como $(0,0) \notin Int(K)$, não temos pontos críticos no interior do compacto.

2. Calculemos o máximos e mínimos na fronteira de K.

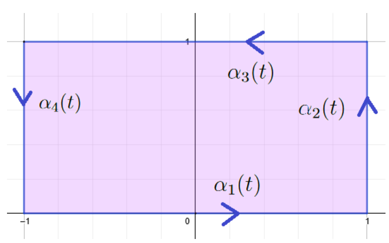


Figure 97: Fronteira do conjunto $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$

   Observe que a fronteira de K é a união dos segmentos $C_1 : \alpha_1(t) = (t,0), t \in [-1,1]$; $C_2 : \alpha_2(t) = (1,t), t \in [0,1]$, $C_3 : \alpha_3(t) = (-t,1), t \in [-1,1]$ e $C_4 : \alpha_4(t) = (-1, 1-t), t \in [0,1]$. Estudemos cada segmento por separado:

   (a) Seja $g_1(t) = f(\alpha_1(t)) = f(t,0) = 2t^2$, $t \in [-1,1]$. Donde $g_1'(t) = 4t = 0 \iff t = 0$. Como 0 é um ponto interior do intervalo $[-1,1]$, os valores máximos e mínimos absolutos de f no segmento C_1 serão atingidos no instante $t = -1$, $t = 0$ ou $t = 1$. Temos, $g_1(-1) = f(-1,0) = 2$, $g_1(1) = f(1,0) = 2$ e $g_1(0) = f(0,0) = 0$.

   (b) Seja $g_2(t) = f(\alpha_2(t)) = f(1,t) = 2 + 3t^2$, $t \in [0,1]$. Donde $g_2'(t) = 6t = 0 \iff t = 0$. Como 0 é um extremo do intervalo $[0,1]$, temos que os valores máximos e mínimos absolutos de f no segmento C_2 serão atingidos no instante $t = 0$ ou $t = 1$. Temos, $g_2(0) = f(1,0) = 2$ e $g_2(1) = f(1,1) = 5$.

(c) Seja $g_3(t) = f(\alpha_3(t)) = f(-t, 1) = 2t^2 + 3,\ t \in [-1, 1]$. Donde $g_3'(t) = 4t = 0 \iff t = 0$. Como 0 é um ponto interior do intervalo $[-1, 1]$, temos que os valores máximos e mínimos absolutos de f no segmento C_3 serão atingidos no instante $t = -1$, $t = 0$ ou $t = 1$. Temos, $g_3(-1) = f(1, 1) = 5$, $g_3(0) = f(0, 1) = 3$ e $g_3(1) = f(-1, 1) = 5$.

(d) Seja $g_4(t) = f(\alpha_4(t)) = f(-1, 1 - t) = 2 + 3(1 - t)^2,\ t \in [0, 1]$. Donde $g_4'(t) = -6(1 - t) = 0 \iff t = 1$. Como 1 é um extremo do intervalo $[0, 1]$, temos que os valores máximos e mínimos absolutos de f no segmento C_4 serão atingidos no instante $t = 0$ ou $t = 1$. Temos, $g_4(0) = f(-1, 1) = 5$ e $g_4(1) = f(-1, 0) = 2$.

3. Resumindo:

pontos	$(-1,0)$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(-1,1)$	$(0,1)$
valores	2	0	2	5	5	3

Comparando todos os valores da tabela, temos que o valor máximo absoluto em K é 5, atingido nos pontos $(1, 1)$ e $(-1, 1)$. Já o valor mínimo absoluto em K é 0, atingido no ponto $(0, 0)$.

Observe que todos os valores são atingidos na fronteira de K, pois f não possui pontos críticos no interior de K.

Na figura a seguir o compacto $K \subset Dom(f)$ está desenhado com cor roxa no plano $z = 0$, Já a imagem do retângulo e seu interior, $f(K) \subset G_f$, está desenhado com cor amarela. Observe como os pontos mais altos em $f(K)$ são $A = (1, 1, 5)$ e $B = (-1, 1, 5)$; e o ponto mais baixo de $f(K)$ é $C = (0, 0, 0)$.

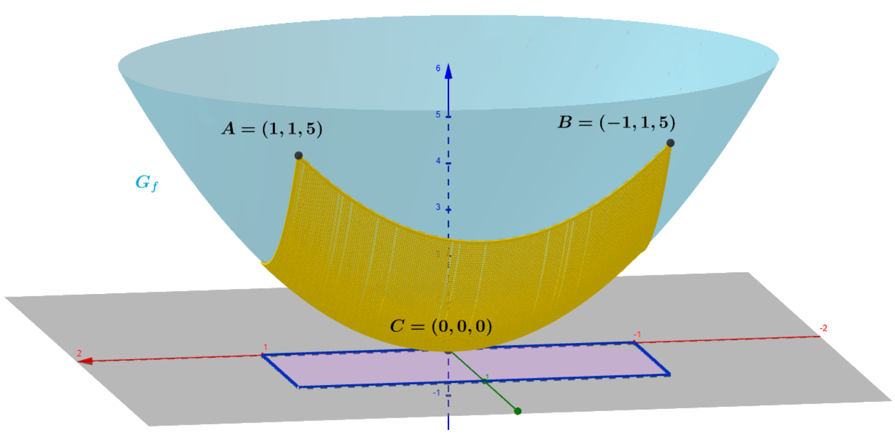


Figure 98: Extremantes absolutos em compactos

Quando a fronteira do compacto é uma curva suave, existe um outro método para calcular os extremantes do item 2 do método para encontrar extremantes absolutos em um conjunto compacto. Esse novo método é devido a Lagrange.

Máximos e mínimos condicionados com uma restrição: Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, D aberto. Queremos extremar $f(x, y)$ sujeito à condição $g(x, y) = 0$.

Dizemos que (x_0, y_0) é máximo local (respectivamente, mínimo local) de f sujeito à condição $C : g(x, y) = 0$ se existir uma bola aberta B de centro (x_0, y_0), tal que $f(x_0, y_0) \geqslant f(x, y)$ (respectivamente, $f(x_0, y_0) \leqslant f(x, y)$), $\forall (x, y) \in B \cap C$.

Teorema de Lagrange: Se f, g são de classe C^1 em D, $C : g(x, y) = 0$ é curva de nível da função g e

(a) $\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$ em C

(b) (x_0, y_0) é um extremante local de f sujeito à condição $g(x, y) = 0$

Então,

$$\nabla f(x_0, y_0) \,\|\, \nabla g(x_0, y_0).$$

Equivalentemente, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ (dito multiplicador de Lagrange), tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

Observação:

(I) Se a curva $C : g(x, y) = 0$ for compacta, o Teorema de Weierstrass garante a existência de extremantes absolutos condicionados. Portanto, para encontrar os candidatos (x_0, y_0) a extremantes locais de $f(x, y)$ sujeito à condição $g(x, y) = 0$, basta com resolver o seguinte sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) \\ \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, sempre que $\nabla g(x, y) \neq \vec{0}$ na curva de nível. Depois devemos fazer uma análise dos dados para achar os extremantes globais.

(II) Se a curva $C : g(x, y) = 0$ não for compacta (por exemplo $xy = 0$), o Teorema de Weierstrass não se aplica. Portanto não está garantida a existência de extremantes absolutos na curva C.

(III) Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, D aberto, funções de classe C^1 de três variáveis. Então o conjunto $C : g(x, y, z) = 0$ é uma superfície de nível. Para encontrar os candidatos (x_0, y_0, z_0) a extremantes de $f(x, y, z)$ sujeito à condição $g(x, y, z) = 0$, devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) \\ \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, sempre que $\nabla g(x,y,z) \neq \vec{0}$ na superfície de nível.

Exemplo: Determine o máximo absoluto de $f(x,y) = x^2 - y^2$, sujeito à condição $3x^2 + 2y^2 = 1$.

Note que f e $g(x,y) = 3x^2 + 2y^2 - 1$ são de classe C^1 e $\nabla g(x,y) = (6x, 4y) \neq (0,0)$ para todo $3x^2 + 2y^2 = 1$. O método dos multiplicadores de Lagrange nos diz que o candidato a máximo absoluto condicionado deve verificar as equações

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} (2x, -2y) = \lambda\,(6x, 4y) \\ \\ 3x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 6\lambda x \quad (1) \\ -2y = 4\lambda y \quad (2) \\ 3x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \quad (3) \end{cases}$$

De (1) temos que $x = 0$ ou $\lambda = \dfrac{1}{3}$. Substituindo $x = 0$ em (3) obtemos $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Portanto os pontos $(0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}})$ e $(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}})$ são candidatos a máximo.

Substituindo $\lambda = \dfrac{1}{3}$ em (2) obtemos $-2y = \dfrac{4}{3}y$, donde $y = 0$. Substituindo $y = 0$ em (3), temos que $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Portanto os pontos $(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ e $(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ também são candidatos a máximo.

Vamos calcular os valores de f nesses pontos:

pontos	$(0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$	$(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$	$(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$	$(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$
valores	$-1/2$	$-1/2$	$1/3$	$1/3$

Comparando os valores da tabela, temos que o valor máximo de f na curva $C : 3x^2 + 2y^2 - 1 = 0$ é $1/3$, atingido nos pontos $(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0)$.

Interpretação geométrica do método dos multiplicadores de Lagrange: Os valores extremos absolutos de $f(x,y)$ restrito à condição $g(x,y)=0$ são atingidos nos pontos onde os vetores gradientes de f e g são paralelos. Isto é, nos pontos onde a curva $g(x,y)=0$ for tangente a uma curva de nível de f.

Com efeito, seja $C: g(x,y)=0$ a curva de nível $k=0$ de g verificando $C \subset D$.

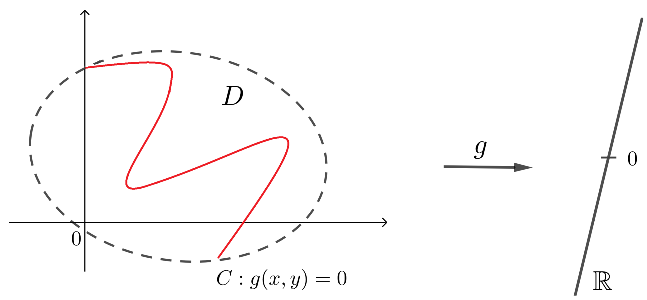


Figure 99: Curva de nível $g(x,y)=0$

Sejam C_{k_1}, C_{k_2}, C_{k_3}, C_{k_4}, ... curvas de nível de f com $k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < \ldots$

A figura a seguir mostra um dos pontos extremos condicionados. Observe que na interseção da curva restrição com a curva de nível C_{k_1} e na interseção com a curva C_{k_3} temos mais dois extremos condicionados. Para detetar qual dos três pontos é de máximo e qual é de mínimo absoluto, precisamos conhecer apenas os valores dos níveis k_1 e k_4, pois o nível k_3 está entre k_1 e k_4. Portanto, se $k_1 < k_4$, o ponto (x,y) é ponto de máximo absoluto (condicionado). Já se $k_1 > k_4$, o ponto (x,y) é ponto de mínimo absoluto (condicionado).

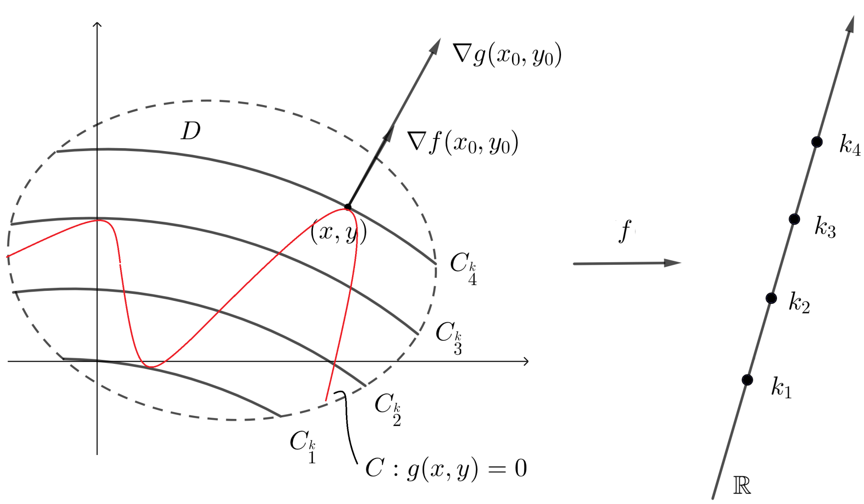


Figure 100: Interpretação geométrica do método dos Multiplicadores de Lagrange

Exemplo: Identifique no mapa de contorno de $f(x,y)=x^2-y^2$ os extremantes condicionados a $3x^2+2y^2=1$.

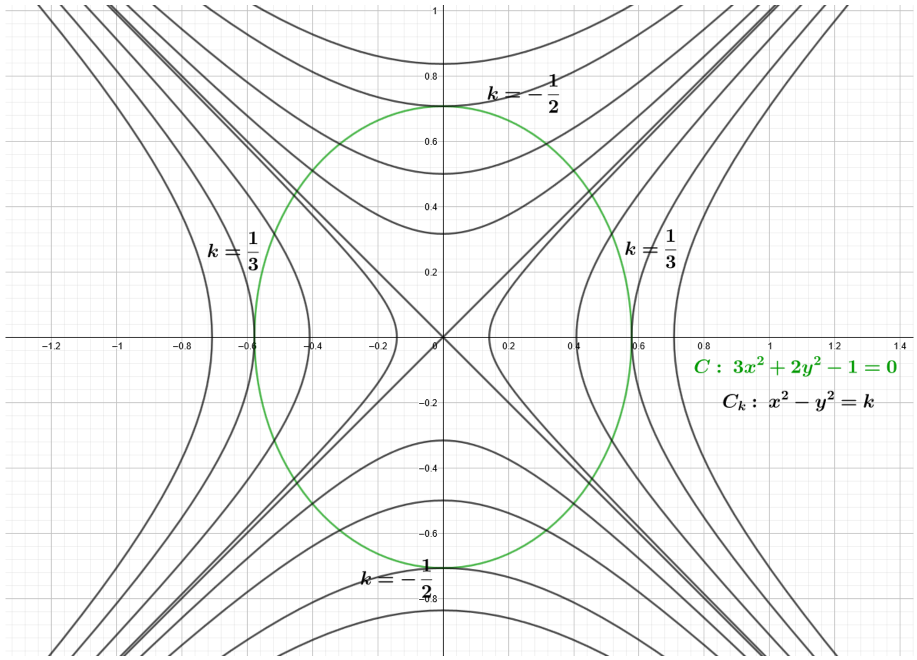


Figure 101: Extremantes de $f(x,y)=x^2-y^2$ condicionado a $3x^2+2y^2=1$

Máximos e mínimos condicionados com duas restrições: Sejam $f,g,h: D\subset\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$, D aberto. Queremos extremar $f(x,y,z)$ sujeito às condições $g(x,y,z)=0$ e $h(x,y,z)=0$.

Sejam $S_1: g(x,y,z)=0$, uma superfície de nível de g, e $S_2: h(x,y,z)=0$, uma superfície de nível de h. E seja $C=S_1\cap S_2$ a curva interseção das duas superfícies.

Se f,g,h são de classe C^1 em D aberto de $\mathbb{R}^3$ com $\nabla g(x,y,z)\neq\vec{O}$ em S_1 e $\nabla h(x,y,z)\neq\vec{O}$ em S_2. Temos que

$\nabla g\,(x_0,y_0,z_0)\perp S_1$ em (x_0,y_0,z_0) e

$\nabla h\,(x_0,y_0,z_0)\perp S_2$ em (x_0,y_0,z_0).

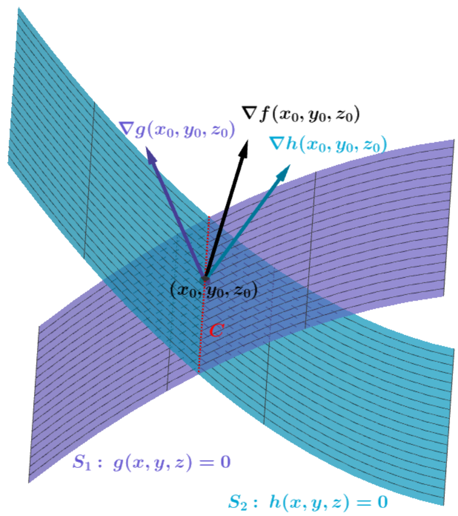


Figure 102: Multiplicadores de Lagrange com duas restrições

Se (x_0, y_0, z_0) é um extremante local de $f(x, y, z)$ sujeito a $g(x, y, z) = 0$ e $h(x, y, z) = 0$, então

(a) $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ está no plano determinado por $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ e $\nabla h(x_0, y_0, z_0)$. Isto é, $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)) + \mu \nabla h(x_0, y_0, z_0)$, para alguns $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(b) $g\left(x_0, y_0, z_0\right) = 0$

(c) $h\left(x_0, y_0, z_0\right) = 0$

Portanto, para encontrar os candidatos a extremantes locais de $f(x, y, z)$ sujeito às condições $g(x, y, z) = 0$ e $h(x, y, z) = 0$, devemos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Exemplo: Encontre os pontos de máximo e mínimo de $f(x, y, z) = x + y + z$, sujeito às restrições $x^2 + y^2 = 2$ e $x + z = 1$.

Devemos resolver o seguinte sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

onde $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2$ e $h(x, y, z) = x + z - 1$.

Temos

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x + \mu & (1) \\ 1 = 2\lambda y & (2) \\ 1 = \mu & (3) \\ x^2 + y^2 = 2 & (4) \\ x + z = 1 & (5) \end{cases}$$

De (1) e (3), temos $2\lambda x = 0$, donde $\lambda = 0$ ou $x = 0$. Se $\lambda = 0$ então de (2) temos $1 = 0$, o que é absurdo. Logo, $x = 0$. De (4) e (5) termos $y = \pm\sqrt{2}, z = 1$. Assim, $(0, \sqrt{2}, 1)$ e $(0, -\sqrt{2}, 1)$ são candidatos a extremantes. Como f é contínua e a curva $C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x + z = 1 \end{cases}$ é um conjunto compacto, então pelo teorema de Weierstrass temos máximo e mínimo absolutos. Como $f(0, \sqrt{2}, 1) = \sqrt{2} + 1 > f(0, -\sqrt{2}, 1) = -\sqrt{2} + 1$, então f tem máximo $1 + \sqrt{2}$ em $(0, \sqrt{2}, 1)$ e mínimo de $1 - \sqrt{2}$ em $(0, -\sqrt{2}, 1)$.

Exemplos

1. Uma placa metálica tem a forma de um disco $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Ela é aquecida de modo que a temperatura num ponto (x, y) é dada por $T(x, y) = 3x^2 + 2y^2 + \dfrac{y^3}{9}$. Encontre a maior e a menor temperatura na placa.

Solução

Como D é um conjunto compacto e $T(x, y)$ é uma função contínua em D, então o Teorema de Weierstrass nos garante a existência de máximo e mínimo em D.

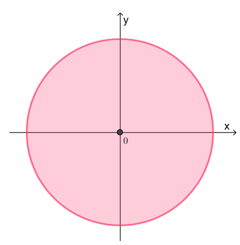


Figure 103: $D : x^2 + y^2 \leqslant 1$

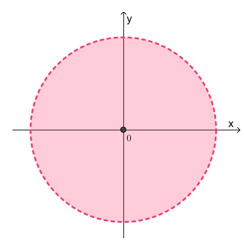


Figure 104: $Int(D) : x^2 + y^2 < 1$

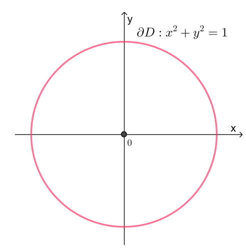


Figure 105: $Fr(D) : x^2 + y^2 = 1$

Em $Int(D)$, no interior de D, temos $\dfrac{\partial T}{\partial x}(x, y) = 6x$, $\dfrac{\partial T}{\partial y}(x, y) = 4y + \frac{y^2}{3}$.

Os pontos críticos em $Int(D)$ são encontrados resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial T}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x = 0 \\ 4y + \frac{y^2}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y\left(4 + \frac{y}{3}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \quad \text{ou} \quad y = -12$$

Portanto, $(0, 0), (0, -12)$ são as soluções. Como $(0, -12) \notin D$, então $(0, 0)$ é o único ponto crítico de T em $Int(D)$. Temos $T(0, 0) = 0$.

Na fronteira de D $(Fr(D))$ é a circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1. Uma parametrização da curva seria $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Logo, a temperatura em $Fr(D)$ é dada por

$$T(t) = T(\cos t, \sin t) = 3\cos^3 t + 2\,\text{sen}^2\, t + \frac{\text{sen}^3\, t}{3}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Em $]0, 2\pi[$: $T'(t) = 0 \Leftrightarrow 6\cos t(-\,\text{sen}\, t) + 4\,\text{sen}\, t\cos t + \frac{3\,\text{sen}^2\, t}{3}\cos t = 0 \Leftrightarrow$ $-2\,\text{sen}\cos t + \text{sen}^2\, t\cos t = 0 \Leftrightarrow \text{sen}\, t\cos t(-2 + \text{sen}\, t) = 0 \Longrightarrow \text{sen}\, t\cos t =$ 0 ou $\underbrace{\text{sen}\, t = 2}_{\text{absurdo!}} \Rightarrow \text{sen}\, t\cos t = 0 \overset{0<t<2\pi}{\Longrightarrow} t = \frac{\pi}{2}, \quad t = \frac{3\pi}{2}, \quad t = \pi.$

Temos

$$T\left(\frac{\pi}{2}\right) = T(0,1) = 2 + \frac{1}{\frac{1}{9}} = \frac{19}{9}, T(\pi) = T(-1,0) = 3, T\left(\frac{3\pi}{2}\right) = T(0,-1) = \frac{17}{9}$$

Na fronteira de $[0, 2\pi]$: 0 e 2π

Temos $T(0) = T(1,0) = 3$, $T(2\pi) = T(1,0) = 3$.

Comparando todos os valores encontrados, temos

$$0 = T(0,0) < 3 = T(1,0) = T(-1,0).$$

Assim, a temperatura mínima é 0 e ocorre em $(0,0)$ e a temperatura máxima é 3, ocorrendo em $(1,0)$ e $(-1,0)$.

2. Encontre o máximo e o mínimo da função $f(x,y) = x^2 + 3xy - 3x$ definida em $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 1\}$.

Solução

Como a função f é contínua no compacto D, então pelo teorema de Weierstrass existem máximo e mínimo em D.

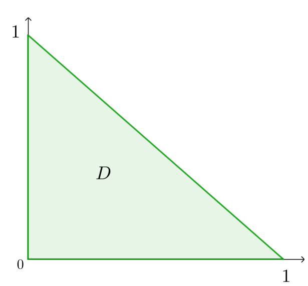


Figure 106:
$D: x \geqslant 0, y \geqslant 0,$
$x + y \leqslant 1$

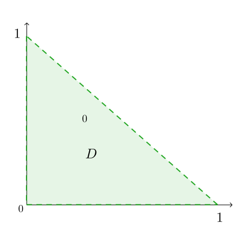


Figure 107:
$D: x, y > 0,$
$x + y < 1$

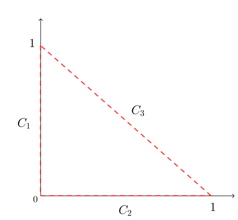


Figure 108:
$D: 0 \leqslant x \leqslant 1 \wedge y = 0,$
$0 \leqslant y \leqslant 1 \wedge x = 0,$
$0 \leqslant x \leqslant 1 \wedge y = 1 - x$

No interior de D, os pontos críticos são encontrados resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + 3y - 3 = 0 & (1) \\ 3x = 0 & (2) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow x = 0 \Rightarrow 3y - 3 = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (0,1)$.

Como $(0,1) \notin Int(D)$, então não existem pontos críticos de f no interior de D. Portanto, os extremantes absolutos estão na fronteira de D.

Temos $Fr(D) = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, onde

$C_1 : x = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1; \quad C_2 : y = 0, 0 \leqslant x \leqslant 1; \quad C_3 : y = 1 - x, 0 \leqslant x \leqslant 1.$

Em $C_1 : g_1(x) = f(x,y) = f(0,y) = 0$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Função constante.

Em $C_2 : g_2(x) = f(x,y) = f(x,0) = x^2 - 3x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. O gráfico da função é uma parábola com valor máximo $f(0,0) = 0$ e mínimo $f(1,0) = -2$.

Em $C_3 : g_3(x) = f(x,y) = f(x,1-x) = x^2+3x(1-x)-3x = x^2+3x-3x^2-3x = -2x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. O gráfico da função é uma parábola com valor máximo $f(0,1) = 0$ e mínimo $f(1,0) = -2$.

Portanto, o valor máximo de f em $Fr(D)$ é 0 e ocorre em todos os pontos da curva C_1. Já o valor mínimo é -2 e é atingido no ponto $(1,0)$.

3. Determine o máximo de $f(x,y) = x + y$, sujeito à condição $x^2 + y^2 = 1$.

Solução

Seja $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Queremos maximizar $f(x,y) = x + y$ sujeito a $g(x,y) = 0$.

Tanto f quanto g são funções de classe C^1, então para aplicar Multiplicadores de Lagrange devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} (1,1) = \lambda(2x, 2y) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 2\lambda x & 1) \\ 1 = 2\lambda y & (2) \\ x^2 + y^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

$(1),(2) \underset{4\neq 0}{\overset{x\neq 0}{\Rightarrow}} \lambda = \dfrac{1}{2x}, \lambda = \dfrac{1}{2y} \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y \Rightarrow 2x^2 = 1.$

Portanto, $x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}, x = y$. Daí, $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ são os candidatos a extremantes locais.

Como $f(x,y) = x + y$ é contínua e $C : x^2 + y^2 = 1$ é um conjunto compacto, então pelo teorema de Weiererstrass f assume máximo absoluto e também mínimo absoluto em C. Aliás,

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} > f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2},$$

então o ponto de máximo é $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e o valor máximo é $\sqrt{2}$.

4. Encontre os pontos da elipse $x^2 + xy + y^2 = 3$ mais próximos e mais afastados da origem.

Solução

A distância de (x, y) à origem é dada por $d(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Então, devemos minimizar $f(x,y) = d^2(x,y) = x^2 + y^2$ sujeito a $g(x,y) = 0$, onde $g(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3$.

Tanto f quanto g são funções de classe C^1, então para aplicar Multiplicadores de Lagrange devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2x = \lambda(2x + y) & 1) \\ 2y = \lambda(x + 2y) & (2) \\ x^2 + xy + y^2 = 3 & (3) \end{cases}$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} (2 - 2\lambda)x - \lambda y = 0 \\ -\lambda x + (2 - 2\lambda)y = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Como $(0, 0)$ não satisfaz (3), então o sistema (4) admite solução não trivial. Logo, o determinante dos coeficientes deve ser nulo. Isto é :

$$\begin{vmatrix} 2 - 2\lambda & -\lambda \\ -\lambda & 2 - 2\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2 - 2\lambda)^2 - \lambda^2 = 0$$

$$\Rightarrow (2 - 2\lambda - \lambda)(2 - 2\lambda + \lambda) = 0 \Rightarrow (2 - 3\lambda)(2 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3} \text{ ou } \lambda = 2$$

Se $\lambda = \frac{2}{3}$, então $\left(2 - \frac{4}{3}\right)x - \frac{2}{3}y = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y = 0$. Portanto, $y = x$ e substituindo em (3), temos que $3x^2 = 3$. Logo $x = \pm 1$ e $y = x$. Donde, $(1, 1)$ e $(-1, -1)$ são candidatos a extremantes.

Se $\lambda = 2$, então $(2 - 4)\,x - 2y = 0 \Rightarrow -2x - 2y = 0$. Portanto, $y = -x$ e substituindo em (3), temos que $x^2 = 3$. Logo $x = \pm\sqrt{3}$ e $y = -x$. Donde, $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ e $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ também são candidatos a extremantes.

Como $C : x^2 + xy + y^2 = 3$ é um conjunto compacto e f é contínua, então f assume máximo absoluto e também mínimo absoluto em C.

Temos

$$f(1,1) = f(-1,-1) = 2 < f(\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = f(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) = 6,$$

então os pontos mais próximos da origem são $(1,1)$ e $(-1,-1)$; e os pontos mais afastados da origem são $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ e $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

5. Determine o ponto da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 12$, cuja soma das coordenadas seja máxima.

   Solução

   Queremos maximizar $f(x, y, x) = x + y + z$ sujeito a $g(x, y, z) = 0$, onde $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 12$.

   Tanto f quanto g são funções de classe C^1, então para aplicar Multiplicadores de Lagrange devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = 2\lambda x & 1) \\ 1 = 2\lambda y & (2) \\ 1 = 2\lambda z & (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 12 & (4) \end{cases}$$

   Como $x, y, z \neq 0$, de $(1), (2), (3)$ temos que $\lambda = \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{2y} = \dfrac{1}{2z}$. Donde $x = y = z$. Substituindo em (4), $3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4$. Daí $x = \pm 2$, $x = y = z$. Portanto, os pontos $(2,2,2)$ e $(-2,-2,-2)$ são candidatos a extremantes.

   Como a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ é um conjunto compacto e f é contínua, pelo teorema de Weierstrass tem-se que f admite máximo absoluto em mínimo absoluto na esfera. Como $f(2,2,2) = 6 > f(-2,-2,-2) = -6$, então $(2,2,2)$ é o ponto da esfera cuja soma das coordenadas é a máxima possível.

Exercícios

1. Encontre os valores extremos absolutos de $f(x, y) = 4xy - x^2 - y^2 - 6x$ na região $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 3x\}$.

2. Determine os pontos de máximo e mínimo absolutos da função $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(x^2 + 2y^2)$ em D: $x^2 + y^2 \leq 9$.

3. Encontre os extremantes absolutos de $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4$ no disco $D : \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 9\}$.

4. A temperatura em qualquer ponto (x, y) do plano é dada por $T(x, y) = x^2 - x + 2y^2$. Qual a temperature máxima e minima num disco fechado de raio 1 centrado na origem?

5. Estude os máximos e mínimos absolutos da função

   (a) $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$, restrita a $x^2 + y^2 = 1$

(b) $f(x,y) = x^2 - 2y^2$, restrita a $x^2 + y^2 - 2x = 0$

6. Determine o ponto do elipsoide $x^2+4y^2+z^2 = 1$ que maximiza a soma $x+2y+z$.

7. Em que pontos da elipse de equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ a reta tangente forma com os eixos coordenados um triângulo de área mínima?

8. Seja $f(x,y) = 3x^2 + 2\sqrt{2}xy + 4y^2$.

   (a) Determine os extremantes locais de f em $\mathbb{R}^2$.

   (b) A temperatura em uma chapa $D = \{(x,y); x^2 + y^2 \leq 9\}$ é dada por $f(x,y) = 3x^2 + 2\sqrt{2}xy + 4y^2$. Determine o máximo e mínimo valor da temperatura (se existirem) em D.

Respostas

1. Máximo absoluto é 0, em $(0,0)$ e o mínimo absoluto é -16 em $(2,0)$

2. Máximo absoluto é $18e^{-9}$ em $(0,3)$ e $(0,-3)$; mínimo absoluto 0 em $(0,0)$.

3. Máximo absoluto é $13+6\sqrt{2}$ em $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$; mínimo absoluto é 2 em $(1,1)$.

4. Temperatura máxima é $\frac{9}{4}$ em $\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e temperatura mínima é $-\frac{1}{4}$ em $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

5. (a) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ponto de minimo; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ pontos de máximo

   (b) $(2,0)$ ponto de máximo; $\left(\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ e $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ pontos de mínimo.

6. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

7. $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{b\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, -\frac{b\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}, b\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}, -\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)$

8. (a) $(0,0)$ é ponto de mínimo local

   (b)

Bibliografia

1. Guidorizzi. Um curso de cálculo, v2, LTC 6a edição, 2019.
2. Anton, Bivens, Davis. Cálculo, v2, Bookman 10a edição, 2014.
3. Stewart. Cálculo, v2, Cengage Learning 7a edição, 2013.
4. Gonçalves, Flemming. Cálculo B, Pearson 2a edição, 2007.
5. Cálculo de várias variáveis com Geogebra 3D. Vol I: https://www.geogebra.org/m/hzvsftdf